33 Équations cartésiennes d'un plan.

I Équations.

Proposition 1 - Équations cartésiennes d'un plan.

Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace

Il existe des réels a, b, c et d (avec a, b et c non tous nuls) tels que $\mathscr{P}$ soit l'ensemble des points $M(x, y, z)$ pour lesquels $ax + by + cz + d = 0$.

Remarques.

1. L'équation $ax + by + cz + d = 0$ est appelée *une équation cartésienne* du plan.
2. Il n'y a pas unicité de l'équation cartésienne d'un plan. Si $ax+by+cz+d = 0$ est une équation d'un plan alors $(ma)x + (mb)y + (mc)z + (md) = 0$ en est aussi une. Les coefficients des diverses équations cartésiennes d'un même plan sont proportionnels les uns aux autres.

Exercice 1. C

On considère un plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est $2x - 3y + 4z + 1 = 0$. Démontrez que $A(1, -3, 2)$ n'appartient pas à $\mathscr{P}$.

II Vecteur normal.

Proposition 2

Soient :

. a, b, c et d des réels a, b et c étant non tous nuls.

Si $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne d'un plan $\mathscr{P}$ alors $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

Exercice 2. C

Déterminez un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est $2x + y - 3z + 14 = 0$.

Exercice 3. C

Déterminez une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par $A(2;3;1)$ et de vecteur directeur est $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-1\\-7\end{pmatrix}$.

Exercice 4. C

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points : $A(4\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 2\ ;\ 0)$ et $C(0\ ;\ 0\ ;\ 2)$.

1. Montrez que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
2. Déduisez-en une équation cartésienne de (ABC).

Exercice 5. C

Soit $A(-1,2,5)$ un point de l'espace rapporté à un repère et $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$ un vecteur.

1. Déterminez une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
2. Soit $B(3,8,7)$. Déterminez une équation du plan médiateur $\mathscr{P}'$ du segment $[AB]$.

Exercice 6. C

Dans l'espace rapporté à un repère, notons $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x+3y-7z-14=0$ et $\mathscr{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{l}x=-2+t\\y=-11+3t\\z=19-5t\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.
Déterminez l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Exercice 7. C

Dans un repère orthonormé on considère $A(3;-3;1)$, $B(2;-1;2)$ et $C(-1;1;-1)$.

1. Déterminez une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par C et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminez une équation du plan $\mathscr{Q}$ médiateur de $[AC]$.
3. Donnez une représentation paramétrique de l'intersection entre $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$.
   Vous pourrez poser $z=t$ dans les deux équations précédentes.

Exercice 8. C

Démontrez que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations respectives $2x + 3y + z = 0$ et $-x + 2y - 4z = 0$ sont orthogonaux.

III Exercices.

Exercice 9. D

Soient $A(1, 0, 3)$, $B(2, 2, 7)$ et $C(-1, 5, 4)$ trois points de l'espace rapporté à un repère et $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x + y - z + 1 = 0$.

1. Démontrez que les points A, B et C définissent un plan.
2. Démontrez que $\mathscr{P}$ est le plan (ABC).
3. Déduisez-en un vecteur normal au plan (ABC).

Exercice 10. C

Vérifiez que $3x - 2y + z = 2$ est une équation cartésienne du plan (ABC) où $A(1; 1; 1)$, $B(-1; -1; 3)$ et $C(2; 1; -2)$.

Exercice 11. E

On donne les points suivants $A(-2, 1, 3)$ et $B(1, -2, 2)$ et $C(4, 1, -1)$.

1. Démontrez que les points A, B et C définissent un seul plan $\mathscr{P}$.
2. Déterminez une équation cartésienne d'un plan $\mathscr{P}'$ orthogonal à $\mathscr{P}$ passant par le point A.

Exercice 12. D

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal on considère les points $A(2, 3, 3)$, $B(-1, 17, -17)$ et un vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. On note $\mathscr{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

1. Démontrez que $H(-9, 5, -1)$ appartient à $\mathscr{P}$.
2. Démontrez que H est le projeté orthogonal de B sur $\mathscr{P}$ et déduisez-en la distance de B à $\mathscr{P}$.
3. Soit $C(5, 11, -5)$. Justifiez que C est le projeté orthogonal de H sur (BC) puis calculez la distance de H à (BC).

Exercice 13. C

Soient $A(8, 10, 5)$ un point et $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x + 3y - z + 1 = 0$ dans l'espace muni d'un repère. Déterminez les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

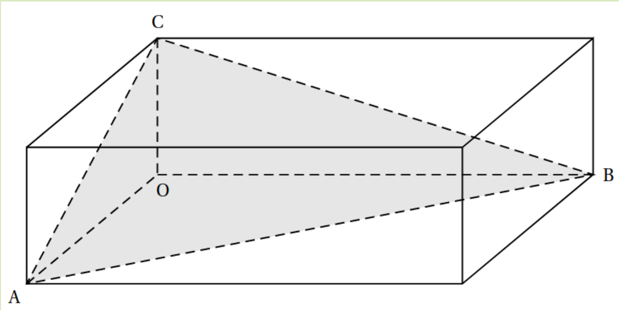
Exercice 14. D

Soient $A(1; 0; -2)$, $B(0; 3; -1)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(0; -1; 0)$ et $S\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}; 4\right)$ des points de l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. Démontrez que $ABCD$ est un rectangle.
2. (a) Montrez que si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) alors, pour tout point M du plan (ABC), on a $SH = \frac{|\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$, où H est le projeté orthogonal de S sur le plan ABC.
   (b) Déterminez les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal au plan (ABC).
   (c) En déduire la hauteur SH de la pyramide $SABCD$.
3. Calculez le volume de la pyramide $SABCD$.

Exercice 15. D

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points :
A de coordonnées $(2\,;\,0\,;\,0)$, B de coordonnées $(0\,;\,3\,;\,0)$ et C de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,1)$.

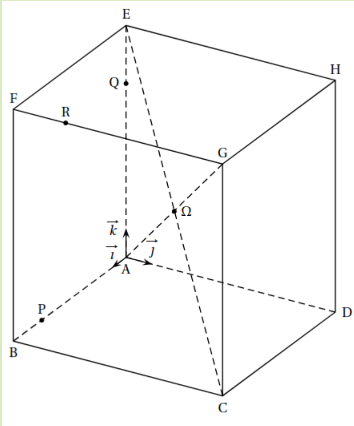


L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

1. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
   (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $3x + 2y + 6z - 6 = 0$.
2. On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
   (b) Montrer que la droite d coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $\left(\frac{18}{49}\,;\,\frac{12}{49}\,;\,\frac{36}{49}\right)$.
   (c) Calculer la distance OH.
3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.
   En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide OABC, déterminer l'aire du triangle ABC.

Exercice 16. D

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 8 cm et de centre Ω. Les points P, Q et R sont définis par $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$. On se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ avec : $\vec{\imath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.



Partie I

1. Dans ce repère, on admet que les coordonnées du point R sont $(8\,;\,2\,;\,8)$.
   Donner les coordonnées des points P et Q.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1\ ;\ -5\ ;\ 1)$ est un vecteur normal au plan (PQR).
3. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est $x - 5y + z - 6 = 0$.

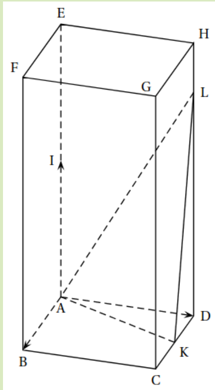
Partie II

On note L le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR).

1. Justifier que les coordonnées du point Ω sont $(4\,;\,4\,;\,4)$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (PQR) et passant par Ω.
3. Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{14}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{14}{3}\right)$
4. Calculer la distance du point Ω au plan (PQR).

Exercice 17. D

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que AB = AD = 1 et AE = 2, représenté ci- dessous.
Le point I est le milieu du segment [AE]. Le point K est le milieu du segment [DC]. Le point L est défini par : $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$. N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).



On se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AI}\right)$.
On admet que le point L a pour coordonnées $\left(0\ ;\ 1\ ;\ \frac{3}{2}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.
2. (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(6\ ;\ -3\ ;\ 2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).
   (c) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).
   (d) En déduire que le point N de coordonnées $\left(\frac{18}{49}\ ;\ \frac{40}{49}\ ;\ \frac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule :

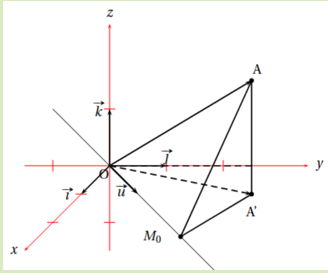
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

3. (a) Calculer le volume du tétraèdre ADKL en utilisant le triangle ADK comme base.
   (b) Calculer la distance du point D au plan (AKL).
   (c) Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

Exercice 18. D

Dans un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ on considère

- le point A de coordonnées $(1\,;3\,;2)$,
- le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.



Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.
On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t\ ;\ t\ ;\ 0)$.
   (a) On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que :
   $$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14.$$
   (b) Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2\ ;\ 2\ ;\ 0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale.
   On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.
3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.
4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1\ ;\ 3\ ;\ 0)$.
   Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.
5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.
   On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire
   d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

Exercice 19. D

— Baccalauréat S Amérique du Nord 30 mai 2013. Exercice 1.
— Baccalauréat S Liban 28 mai 2013. Exercice1 qCM.