31 Représentation paramétrique d'une droite.

I La représentation paramétrique.

II Exercices.

Exercice 1. C

Donnez une représentation paramétrique de la droite Δ de $\mathscr{E}_3$ définie par :

a) $A(-1,-2,1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$,

b) $A(1,0,0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$,

c) $A(17,37,0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,

d) $A(100;2,4;-\frac{1}{3})$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{\pi}\\3\times 10^2\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$,

e) $A(2,3,4)$ et $B(-2,6,5)$,

f) $A(6,-2,1)$ et $B(1,2,-1)$,

g) $A(5,7,0)$ et $B(0,1,2)$,

h) $A(1,2,3)$ et $B(-2,2,2)$,

i) $A(0,-1,1)$ et $B(0,2,1)$,

j) $A(2,0,4)$ et $B(1,0,3)$,

k) $A(1,-1,0)$ et $B(0,2,0)$,

l) $A(0,0,3)$ et $B(0,0,-2)$,

Correction de l'exercice 1

a)
$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & t-1 \\ y & = & 2t-2 \\ z & = & -3t+1 \end{array}\right.$$

b)
$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 2t+1 \\ y & = & -t \\ z & = & 4t \end{array}\right.$$

c)
$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 17 \\ y & = & t+37 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

d)
$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & \sqrt{\pi}t+100 \\ y & = & -t+2,4 \\ z & = & \frac{2}{3}t-\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

e)
$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & -4t+2 \\ y & = & 3t+3 \\ z & = & t+4 \end{array}\right.$$

f)
$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & -5t+6 \\ y & = & 4t+-2 \\ z & = & -2t+1 \end{array}\right.$$

g)

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & -5t+5 \\ y & = & -6t+7 \\ z & = & 2t \end{array}\right.$$

h)

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & -3t+1 \\ y & = & 2 \\ z & = & -t+3 \end{array}\right.$$

i)

$$\left\{\begin{array}{ll} x & = \\ y & = \\ z & = \end{array}\right.$$

j)

$$\left\{\begin{array}{ll} x & = \\ y & = \\ z & = \end{array}\right.$$

k)

$$\left\{\begin{array}{ll} x & = \\ y & = \\ z & = \end{array}\right.$$

Exercice 2. C

Donnez un vecteur directeur et deux points des droites dont les représentations paramétriques sont données :

a) $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 3t+1 \\ y & = & 2t-3 \\ z & = & -4t+2 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$

b) $\left\{\begin{array}{lll} x & = & -2t+2 \\ y & = & t-2 \\ z & = & 6t+3 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$

c) $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1 \\ y & = & -t-3 \\ z & = & t+2 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$

d) $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 2t \\ y & = & 3t-3 \\ z & = & 4 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$

Correction de l'exercice 2

a) $(1;-3;2)$, $(13;17;-38)$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

b) $(2;-2;3)$, $(-2;0;15)$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

c) $(1;-3;2)$, $(1;-6;5)$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) $(0;-3;4)$, $(20;27;4)$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. C

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont-elles égales sachant que :

$$\mathscr{D} : \left\{\begin{array}{lll} x & = & -5t-3 \\ y & = & -17t+4 \\ z & = & -2t+2 \end{array}\right., t \in \mathbb{R} \text{ et } \mathscr{D}' : \left\{\begin{array}{lll} x & = & 25t-8 \\ y & = & 85t-13 \\ z & = & 10t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$$

Correction de l'exercice 3

Les deux droites ont des vecteurs directeurs colinéaires donc elles sont parallèles.

De plus : $\begin{cases} -5t_1 - 3 = 25t_2 - 8 \\ -17t_1 + 4 = 85t_2 - 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t_1 + 25t_2 = 5 \\ 17t_1 + 85t_2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + 5t_2 = 1 \\ t_1 + 5t_2 = 1 \end{cases}$.

Si $t_1 = 1$ alors $t_2 = 0$ et effectivement pour $t_1 = 1$ et $t_2 = 0$ on obtient un même point avec les deux droites.

Exercice 4. C

Déterminez si les droites suivantes de $\mathscr{E}_3$ rapporté à un repère, sont sécantes.

a) Δ_1 qui passe par $A_1(1,3,4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et Δ_2 qui passe par $A_2(-1,3,4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_2\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\Delta_1 : \begin{cases} x &= t \\ y &= -2t-3 \\ z &= t+1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $\Delta_2 : \begin{cases} x &= 2t \\ y &= 3t-3 \\ z &= 4+1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Correction de l'exercice 4

1. $\vec{u}_2 = 3\vec{u}_1$ donc les droites sont parallèles.
2. On vérifie que les vecteurs directeurs ne sont pas parallèles.

   * Analyse.
   Si $M(x,y,z) \in \Delta_1 \cap \Delta_2$ alors il existe des réels t_1 et t_2 tels que :

   $$\begin{cases} t_1 = 2t_2 \\ -2t_1 - 3 = 3t_2 - 3 \\ t_1 + 1 = 5 \end{cases}$$

   De la première équation nous déduisons : $t_1 = 2t_2$.
   En substituant dans la seconde : $-2(2t_2) - 3 = 3t_2 - 3$ et donc $t_2 = 0$.
   Puis $t_1 = \frac{1}{2}t_2 = 0$.
   Ainsi s'il y a un point commun aux deux droites il ne peut être obtenu que pour $t_1 = t_2 = 0$.
   * Synthèse.
   Pour $t_1 = 0$ le point de Δ_1 a pour coordonnées $(0; -3; 1)$.
   Pour $t_2 = 0$ le point de Δ_2 a pour coordonnées $(0; -3; 5)$.

Δ_1 et Δ_2 ne sont pas sécantes.

Exercice 5. C

Déterminez les droites parallèles parmi
$\Delta_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t+1 \\ y & = & 2t-3 \\ z & = & -t+1 \end{array}\right.$, $\Delta_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t-17 \\ y & = & -5t+7 \\ z & = & t+45 \end{array}\right.$, $\Delta_3 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4t+24 \\ y & = & -10t-3 \\ z & = & 2t-\pi \end{array}\right.$, $\Delta_4 :$
$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t+12 \\ y & = & 2t-18 \\ z & = & -t+34 \end{array}\right.$, $\Delta_5 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -6t+1 \\ y & = & -4t-3 \\ z & = & 2t+1 \end{array}\right.$.

Exercice 6. C

Soient $\Delta_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 7t-2 \\ y & = & -2t+3 \\ z & = & t+1 \end{array}\right.$ une droite et $A(1,0,1)$ un point.
Déterminez une représentation paramétrique de la droite Δ_2 parallèle à Δ_1 et passant par A.

Correction de l'exercice 6

$$\Delta_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 7t1 \\ y & = & -2t \\ z & = & t+1 \end{array}\right.$$

Exercice 7. C

Soit $ABCD$ un tétraèdre.
L'espace est rapporté au repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.
On appelle I et J les milieux respectifs de $[DC]$ et de $[BC]$.
Soient E et F les points définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

1. Déterminez les coordonnées des points I, J, E et F.
2. Démontrez que (EF) est parallèle à (IJ).

Correction de l'exercice 7

1. * Identité du parallélogramme : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$. Donc $I\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
   * Identité du parallélogramme : $J\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.
   * $E\left(\frac{1}{4}; 0; 0\right)$.
   * $F\left(0; 0; \frac{1}{4}\right)$.
2. $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -1/4 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$.

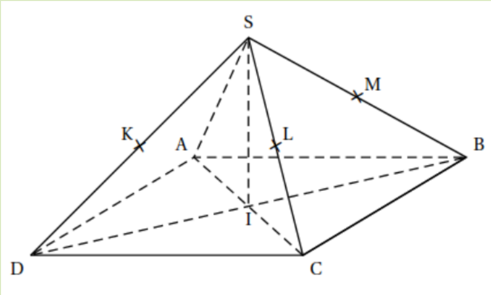
$$\boxed{(EF) \parallel (IJ).}$$

Exercice 8. C

1. Déterminez une représentation paramétrique de la droite (AB) où $A(1,-1,3)$ et $B(3,2,4)$.
2. On considère le point $E(-5,7,1)$.

   Déterminez une représentation paramétrique de la droite d contenant E et parallèle à (AB).
3. On considère le point $F(-1,13,3)$.
   (a) Justifiez que (AF) et d ne sont pas parallèles.
   (b) Déterminez les coordonnées de leur point d'intersection s'il existe.

Exercice 9. D



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré ABCD.
On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\text{I} ; \overrightarrow{\text{IC}}, \overrightarrow{\text{IB}}, \overrightarrow{\text{IS}}\right)$. Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants : I$(0 ; 0 ; 0)$; A$(-1 ; 0 ; 0)$; B$(0 ; 1 ; 0)$; C$(1 ; 0 ; 0)$; D$(0 ; -1 ; 0)$; S$(0 ; 0 ; 1)$.

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4} ; -\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\right)$

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AS}}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -1-t\\ y &=& t\\ z &=& -t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -1+2t\\ y &=& 0\\ z &=& 1+2t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **c.** $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& t\\ y &=& 0\\ z &=& 1+t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **d.** $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -1-t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 1-t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

Correction de l'exercice 9

1. c.
2. b. Un raisonnement sur le signe des coordonnées suffit.
3. b.
4. c. Point S et vecteur $\overrightarrow{AS}$.

Exercice 10. D

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère :

- La droite $\mathcal{D}$ passant par les points A$(1\ ;\ 1\ ;\ -2)$ et B$(-1\ ;\ 3\ ;\ 2)$.
- La droite $\mathcal{D}'$ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x &= -4+3t \\ y &= 6-3t \\ z &= 8-6t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Question 1 : Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite $\mathcal{D}'$?

a. $\mathrm{M}_1(-1;3;-2)$ **b.** $\mathrm{M}_2(11;-9;-22)$ **c.** $\mathrm{M}_3(-7;9;2)$ **d.** $\mathrm{M}_4(-2;3;4)$

Question 2 : Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$ est :

a. $\vec{u_1}\begin{pmatrix}-4\\6\\8\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{u_2}\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$ **c.** $\vec{u_3}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ **d.** $\vec{u_4}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

Question 3 : Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont :

a. sécantes **b.** strictement parallèles **c.** non coplanaires **d.** confondues

Correction de l'exercice 10

1. b. On résout les systèmes.
2. c. Immédiat.
3. a. Parallèles mais $A \notin \mathscr{D}$.

Exercice 11. D

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points A(1 ; 0 ; 2), B(2 ; 1 ; 0), C(0 ; 1 ; 2) et la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1+2t \\ y & = & -2+t \\ z & = & 4-t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

1. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

   Réponse A : M(2 ; 1 ; −1) ; **Réponse B :** N(−3 ; −4 ; 6) ;
   Réponse C : P(−3 ; −4 ; 2) ; **Réponse D :** Q(−5 ; −5 ; 1).

2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet pour coordonnées :

   Réponse A : $\begin{pmatrix}1,5\\0,5\\1\end{pmatrix}$; **Réponse B :** $\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$;
   Réponse C : $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ **Réponse D :** $\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$.

3. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

   Réponse A : $\left\{\begin{array}{l} x=1+2t \\ y=t \\ z=2 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$ **Réponse B :** $\left\{\begin{array}{l} x=2-t \\ y=1-t \\ z=2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$

   Réponse C : $\left\{\begin{array}{l} x=2+t \\ y=1+t \\ z=2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$ **Réponse D :** $\left\{\begin{array}{l} x=1+t \\ y=1+t \\ z=2-2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$

4. On considère le point D défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$.

   Réponse A : $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires ; **Réponse B :** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$;
   Réponse C : D a pour coordonnées (3 ; −1 ; −1) ; **Réponse D :** les points A, B, C et D sont alignés.

Correction de l'exercice 11

1. b.
2. c.

3. b. Avec B et $\overrightarrow{BA}$.
4. a. Combinaison linéaire $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$.

Exercice 12. C

Soient d et d' deux droites dont on donne une représentation paramétrique :

$$d : \begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = -3t + 1 \\ z = t + 2 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}, \quad d' : \begin{cases} x = t' - 1 \\ y = -2t' \\ z = 4 \end{cases}, \ t' \in \mathbb{R}$$

1. Pour chaque droite donnez un point et un vecteur directeur.
2. Les droites d et d' sont-elles parallèles ? sécantes ?
3. Que pouvez-vous conclure ?

Correction de l'exercice 12

1. $A(3;1;2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $B(-1;0;4)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ pas parallèles.

   $-2t + 3 = t' - 1 \Leftrightarrow t' = -2t + 2$ donc $-3t + 1 = -2(-2t + 2) \Leftrightarrow t = \frac{5}{7}$. Or $\frac{5}{7} + 2 \neq 4$ donc pas de point d'intersection. Pas sécantes.
3. Les droites sont non coplanaires.

Exercice 13. D

1. Polynésie 13 mars 2023 exercice 2.

Exercice 14.

Dans chaque cas étudiez la position relative des droites d et d'.

$$d : \begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

1.

Exercice 15.

Exercice 16.

Exercice 17.