31 Représentation paramétrique d'une droite.

I La représentation paramétrique.

Soit $\mathscr{D}$ une droite de l'espace rapporté à repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ passant par $A(1,-2,3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Dire que $M(x,y,z)\in\mathscr{D}$ équivaut à dire que $\overrightarrow{AM}$ et colinéaire à $\vec{u}$.
Autrement dit, puisque $\vec{u}\neq 0$, il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$.
En considérant les coordonnées nous obtenons donc

$$\left\{\begin{array}{r}x-1=t\times 2\\ y+2=t\times 1\\ z-3=t\times -1\end{array}\right.$$

Ainsi dire que $M\in\mathscr{D}$ signifie qu'il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que les coordonnées de M sont données par

$$\left\{\begin{array}{rcl}x&=&2t+1\\ y&=&t-2\\ z&=&-t+3\end{array}\right.$$

Formellement c'est comme si nous avions $M=t\vec{u}+A$.

Proposition 1 et définition.

Soient :

. $A(x_A,y_A,z_A)$ un point de l'espace rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,

. $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace,

. $\mathscr{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

$M\in\mathscr{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl}x&=&at+x_A\\ y&=&bt+y_A\\ z&=&ct+z_A\end{array}\right.$$

Nous dirons alors que ce système d'équation est une *représentation paramétrique* de la droite $\mathscr{D}$.

Remarques.

1. En physique nous utiliserons une notation fonctionnelle pour indiquer la dépendance de x à t : $x(t) = at + x_A$.
   D'ailleurs si $x(t)$ représente l'abscisse d'un point M, t sera souvent le temps.
2. À chaque vecteur directeur et à chaque point de la droite correspondent une nouvelle représentation paramétrique : il y a donc une infinité de représentations paramétriques d'une droite.
3. Formellement (il ne faut pas l'écrire comme ceci) la représentation paramétrique correspond à : $M = A + t\vec{u}$. C'est une bonne astuce mnémotechnique.
4. Il n'est pas forcément étonnant que la représentation paramétrique d'une droite fasse apparaître des fonctions affines.

Les usages que vous ferez de la représentation paramétrique des droites : vérifier que des droites sont sécantes, ou parallèles, ou orthogonales, ou non coplanaires.

Il faut donc savoir trouver la représentation paramétrique à partir d'un point et d'un vecteur directeur, de deux points mais aussi à partir de la représentation paramétrique retrouver un point de la droite et un vecteur directeur.

Exemples.

1. La droite passant par $A(1;2;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ a pour représentation paramétrique
2. La droit passant par $A(1;2;3)$ et $B(5;-6;7)$ a pour représentation paramétrique
3. On considère la droite $\mathscr{D}$ dont la représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t+3 \\ y & = & 1 \\ z & = & t-2 \end{array}\right.$$

   un vecteur directeur et deux points de la droite

II Exercices.

Exercice 1. C

Donnez une représentation paramétrique de la droite Δ de $\mathscr{E}_3$ définie par :

a) $A(-1,-2,1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$,

b) $A(1,0,0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$,

c) $A(17,37,0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,

d) $A(100;2,4;-\frac{1}{3})$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{\pi}\\3\times 10^2\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$,

e) $A(2,3,4)$ et $B(-2,6,5)$,

f) $A(6,-2,1)$ et $B(1,2,-1)$,

g) $A(5,7,0)$ et $B(0,1,2)$,

h) $A(1,2,3)$ et $B(-2,2,2)$,

i) $A(0,-1,1)$ et $B(0,2,1)$,

j) $A(2,0,4)$ et $B(1,0,3)$,

k) $A(1,-1,0)$ et $B(0,2,0)$,

l) $A(0,0,3)$ et $B(0,0,-2)$,

Exercice 2. C

Donnez un vecteur directeur et deux points des droites dont les représentations paramétriques sont données :

a) $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t+1 \\ y & = & 2t-3 \\ z & = & -4t+2 \end{array}\right., t\in\mathbb{R}$

b) $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2t+2 \\ y & = & t-2 \\ z & = & 6t+3 \end{array}\right., t\in\mathbb{R}$

c) $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & -t-3 \\ z & = & t+2 \end{array}\right., t\in\mathbb{R}$

d) $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t \\ y & = & 3t-3 \\ z & = & 4 \end{array}\right., t\in\mathbb{R}$

Exercice 3. C

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont-elles égales sachant que :

$$\mathscr{D} : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -5t-3 \\ y & = & -17t+4 \\ z & = & -2t+2 \end{array}\right., t\in\mathbb{R} \text{ et } \mathscr{D}' : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 25t-8 \\ y & = & 85t-13 \\ z & = & 10t \end{array}\right., t\in\mathbb{R}$$

Exercice 4. C

Déterminez si les droites suivantes de $\mathscr{E}_3$ rapporté à un repère, sont sécantes.

a) Δ_1 qui passe par $A_1(1,3,4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et Δ_2 qui passe par $A_2(-1,3,4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}_2\begin{pmatrix}3\\6\\-3\end{pmatrix}$

b) $\Delta_1 : \begin{cases} x &= t \\ y &= -2t-3 \\ z &= t+1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $\Delta_2 : \begin{cases} x &= 2t \\ y &= 3t-3 \\ z &= 4+1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Exercice 5. C

Déterminez les droites parallèles parmi

$\Delta_1 : \begin{cases} x &= 3t+1 \\ y &= 2t-3 \\ z &= -t+1 \end{cases}$, $\Delta_2 : \begin{cases} x &= 2t-17 \\ y &= -5t+7 \\ z &= t+45 \end{cases}$, $\Delta_3 : \begin{cases} x &= 4t+24 \\ y &= -10t-3 \\ z &= 2t-\pi \end{cases}$, $\Delta_4 : \begin{cases} x &= 3t+12 \\ y &= 2t-18 \\ z &= -t+34 \end{cases}$, $\Delta_5 : \begin{cases} x &= -6t+1 \\ y &= -4t-3 \\ z &= 2t+1 \end{cases}$.

Exercice 6. C

Soient $\Delta_1 : \begin{cases} x &= 7t-2 \\ y &= -2t+3 \\ z &= t+1 \end{cases}$ une droite et $A(1,0,1)$ un point.

Déterminez une représentation paramétrique de la droite Δ_2 parallèle à Δ_1 et passant par A.

Exercice 7. C

Soit $ABCD$ un tétraèdre.
L'espace est rapporté au repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.
On appelle I et J les milieux respectifs de $[DC]$ et de $[BC]$.
Soient E et F les points définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

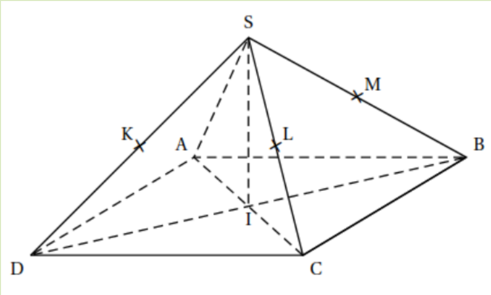
1. Déterminez les coordonnées des points I, J, E et F.
2. Démontrez que (EF) est parallèle à (IJ).

Exercice 8. C

1. Déterminez une représentation paramétrique de la droite (AB) où $A(1, -1, 3)$ et $B(3, 2, 4)$.
2. On considère le point $E(-5, 7, 1)$.

   Déterminez une représentation paramétrique de la droite d contenant E et parallèle à (AB).
3. On considère le point $F(-1, 13, 3)$.
   (a) Justifiez que (AF) et d ne sont pas parallèles.
   (b) Déterminez les coordonnées de leur point d'intersection s'il existe.

Exercice 9. D



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré ABCD.
On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\mathrm{I} ; \overrightarrow{\mathrm{IC}}, \overrightarrow{\mathrm{IB}}, \overrightarrow{\mathrm{IS}}\right)$. Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants : $\mathrm{I}(0 ; 0 ; 0)$; $\mathrm{A}(-1 ; 0 ; 0)$; $\mathrm{B}(0 ; 1 ; 0)$; $\mathrm{C}(1 ; 0 ; 0)$; $\mathrm{D}(0 ; -1 ; 0)$; $\mathrm{S}(0 ; 0 ; 1)$.

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4} ; -\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\right)$

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -1-t \\ y & = & t \\ z & = & -t \end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -1+2t \\ y & = & 0 \\ z & = & 1+2t \end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **c.** $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & t \\ y & = & 0 \\ z & = & 1+t \end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **d.** $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -1-t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 1-t \end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

Exercice 10. D

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère :

- La droite $\mathcal{D}$ passant par les points A$(1\ ;\ 1\ ;\ -2)$ et B$(-1\ ;\ 3\ ;\ 2)$.
- La droite $\mathcal{D}'$ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x &= -4+3t \\ y &= 6-3t \\ z &= 8-6t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Question 1 : Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite $\mathcal{D}'$?

a. $M_1(-1;3;-2)$ **b.** $M_2(11;-9;-22)$ **c.** $M_3(-7;9;2)$ **d.** $M_4(-2;3;4)$

Question 2 : Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$ est :

a. $\vec{u_1}\begin{pmatrix}-4\\6\\8\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{u_2}\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$ **c.** $\vec{u_3}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ **d.** $\vec{u_4}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

Question 3 : Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont :

a. sécantes **b.** strictement parallèles **c.** non coplanaires **d.** confondues

Exercice 11. D

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points A(1 ; 0 ; 2), B(2 ; 1 ; 0), C(0 ; 1 ; 2) et la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 1+2t \\ y & = & -2+t \\ z & = & 4-t \end{array}\right. ,t\in\mathbb{R}.$$

1. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

   Réponse A : M(2 ; 1 ; −1) ; **Réponse B :** N(−3 ; −4 ; 6) ;
   Réponse C : P(−3 ; −4 ; 2) ; **Réponse D :** Q(−5 ; −5 ; 1).

2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet pour coordonnées :

   Réponse A : $\begin{pmatrix}1,5\\0,5\\1\end{pmatrix}$; **Réponse B :** $\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$;
   Réponse C : $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ **Réponse D :** $\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$.

3. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

   Réponse A : $\left\{\begin{array}{l} x=1+2t \\ y=t \\ z=2 \end{array}\right. ,t\in\mathbb{R}$ **Réponse B :** $\left\{\begin{array}{l} x=2-t \\ y=1-t \\ z=2t \end{array}\right. ,t\in\mathbb{R}$

   Réponse C : $\left\{\begin{array}{l} x=2+t \\ y=1+t \\ z=2t \end{array}\right. ,t\in\mathbb{R}$ **Réponse D :** $\left\{\begin{array}{l} x=1+t \\ y=1+t \\ z=2-2t \end{array}\right. ,t\in\mathbb{R}$

4. On considère le point D défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$.

   Réponse A : $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires ; **Réponse B :** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$;
   Réponse C : D a pour coordonnées (3 ; −1 ; −1) ; **Réponse D :** les points A, B, C et D sont alignés.

Exercice 12. C

Soient d et d' deux droites dont on donne une représentation paramétrique :

$$d : \begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = -3t + 1 \\ z = t + 2 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}, \quad d' : \begin{cases} x = t' - 1 \\ y = -2t' \\ z = 4 \end{cases}, \ t' \in \mathbb{R}$$

1. Pour chaque droite donnez un point et un vecteur directeur.
2. Les droites d et d' sont-elles parallèles ? sécantes ?
3. Que pouvez-vous conclure ?

Exercice 13. D

1. Polynésie 13 mars 2023 exercice 2.
2. Amérique du Nord 19 mai 2022 exercice 3.

Exercice 14.

Dans chaque cas étudiez la position relative des droites d et d'.

$$d : \left\{ \begin{array}{l} x = \\ y = \\ z = \end{array} \right. , \ t \in \mathbb{R}$$

1.

Exercice 15.

Exercice 16.

Exercice 17.

31 Représentation paramétrique d'une droite.