# 28 Convexité, dérivée seconde.

## I Définition.

## II Caractérisations pour les fonctions une fois dérivables.

## III Caractérisation pour les fonctions deux fois dérivables.

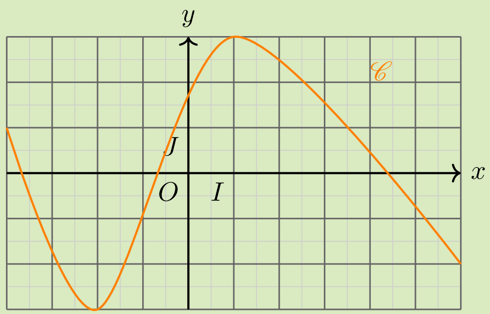
## IV Inégalités.

## V Exercices.

**Exercice 1.** B

Décrivez la convexité de la fonction $f$ si

1. la courbe représentative ci-dessous est celle de $f$.
2. la courbe représentative ci-dessous est celle de $f'$.
3. la courbe représentative ci-dessous est celle de $f''$.




**Exercice 2.** C

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x} + 1$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminez la convexité de $f$.
2. Déterminez une équation de la tangente au point d'abscisse 0.
3. Déduisez-en que pour tout réel $x$ appartenant à $[-2, +\infty[$, $f(x) \geqslant x + 1$.
4. Retrouvez le précédent résultat en résolvant l'inéquation $f(x) \geqslant x + 1$.

### Exercice 3. C

Étudiez la convexité de la fonction

1. $f : x \mapsto x^3 - 5x^2 + 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g : x \mapsto \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Correction de l'exercice 3

1. $f'(x) = 3x^2 - 10x + 4$ puis $f''(x) = 6x - 10$.
   $f$ convexe sur $\left[\frac{5}{3}, ; +\infty\right[$ et concave sinon.
2. $g'(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{x^2}$ puis $g''(x) = -\frac{6}{x^3}$. $g$ est convexe sur $\mathbb{R}_-$.

### Exercice 4. C

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$. Nous admettons que $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f$ est paire.
2. Étudiez le sens de variation de $f$ sur $[0, +\infty[$.
3. Étudiez la limite de $f$ en $+\infty$.
4. Déduisez des questions précédentes le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminez l'équation de la tangente $\Delta$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse 3.
6. (a) Vérifiez que pour tout réel $x$, $f''(x) = \dfrac{9}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}$.
   (b) Déduisez-en les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\Delta$.

Correction de l'exercice 4

1. Démontrons que $f$ est paire.

   * $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.
   * Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 9} = \sqrt{x^2 + 9} = f(x)$.

   $$\boxed{f \text{ est paire.}}$$

2. Par translation et composition il est claire que $f_{|\mathbb{R}_+}$ est croissante.

   Étudions les variations de $f$.

   $f = \sqrt{u}$ où $u : x \mapsto x^2 + 9$.
   Or $u$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $u > 0$ donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

$f'(x)$ est du signe de $x$.

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

3. Étudions la convergence de $f$ en $+\infty$.

   $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, donc en sommant $\lim_{x\to+\infty} x^2+9 = +\infty$ puis, comme $\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$, en composant

   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

4. Dressons le tableau de variation de $f$.

   Par parité de $f$ on déduit de ce qui précède ce qu'il en est sur $\mathbb{R}_-$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

5. Déterminons une équation de $\Delta$.

   $f'(3) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f(3) = 3\sqrt{2}$ donc

   $$\Delta : \ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-3) + 3\sqrt{2}.$$

   $$\boxed{\Delta : \ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{2}.}$$

6. (a) Déterminons l'expression algébrique de $f''$.

   $f' = \frac{v}{f}$ où $v : x \mapsto x$. $v$ et $f$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f > 0$ , d'après le précédent tableau de variation, donc $f'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\sqrt{x^2+9} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} \\ &= \frac{\frac{x^2+9-x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \frac{9}{\sqrt{x^2+9}(x^2+9)}.$$

(b) Étudions la position relatives de $\Delta$ et $\mathscr{C}_f$.

$f'' > 0$ donc $f$ est convexe donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.

$\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\Delta$.

**Exercice 5.** C

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^6 + 3x^2 + 6$.

1. Montrez que $f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminez une équation de la tangente $T$ à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 1.
3. Déduisez-en que pour tout réel $x$ : $x^6 + 3x^2 + 6 \geqslant 12x - 2$

**Exercice 6.** C

Soit $f$ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{4}{x+5} \leqslant \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{5}$.
2. Déterminez une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 et déduisez-en que, pour tout nombre réel $x$ strictement positif, $\frac{1}{x} \geqslant -\frac{x}{4} + 1$.

Correction de l'exercice 6

1. $f$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+5}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(5)}{2} &\iff \frac{1}{\frac{x+5}{2}} \leqslant \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{5}}{2} \\ &\iff \frac{2}{x+5} \leqslant \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{5}}{2} \\ &\iff \frac{4}{x+5} \leqslant \frac{1}{x}+\frac{1}{5} \text{ car } 2>0 \end{aligned}$$

2. $y = -\frac{1}{2^2}(x-2) + \frac{1}{2} \iff y = -\frac{1}{4}x + 1$.
   $f$ est convexe donc sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses tangentes : $f(x) \geqslant -\frac{1}{4}x + 1$.

## Exercice 7. C

Soit $f$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^3$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+1)^3 \leqslant 4x^3 + 4$.
2. Déterminez une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 et déduisez-en que, pour tout nombre réel $x$, $x^3 \geqslant 3x - 2$.
3. $h$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 5.$$
En utilisant l'inégalité précédente, montrez que la fonction $h$ est croissante sur $[0, +\infty[$.

Correction de l'exercice 7

1. $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$ donc pour $y = 1$, $\left(\frac{x+1}{2}\right)^3 \leqslant \frac{x^3+1^3}{2}$.
2. $f'(1) = 3$, $f(1) = 1$, $y = 3x + 2$.
3. $h'(x) = x^3 - 3x + 2$.

### Exercice 8. D

On appelle « satisfaction » toute fonction dérivable qui prend des valeurs comprises entre 0 et 100.
Lorsque la fonction « satisfaction » atteint 100 on dit qu'il y a « saturation ».
On définit aussi la fonction « envie » comme la fonction dérivée de la fonction « satisfaction ».
La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction satisfaction $h$ est définie sur $[10; 50]$ par :

$$h(x) = \frac{90}{1 + \mathrm{e}^{-0,25x+6}};$$

où $x$ est exprimé en milliers d'euros.
On note $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de la fonction $h$.

1. Par lecture graphique sur votre calculatrice conjecturez la convexité de la fonction $h$ ainsi que le sens de variation de la fonction « envie ». Donnez-en une interprétation.
2. D'après ce modèle serait-il possible d'atteindre la saturation ?
3. Vérifiez que pour tout $x \in [10; 50]$ :

$$h''(x) = \frac{5,625\mathrm{e}^{-0,25x+6}\left(\mathrm{e}^{-0,25x+6} - 1\right)}{\left(1 + \mathrm{e}^{-0,25x+6}\right)^3}.$$

4. Déduisez-en la convexité de la fonction $h$.
5. À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « envie » décroît ?

Correction de l'exercice 8

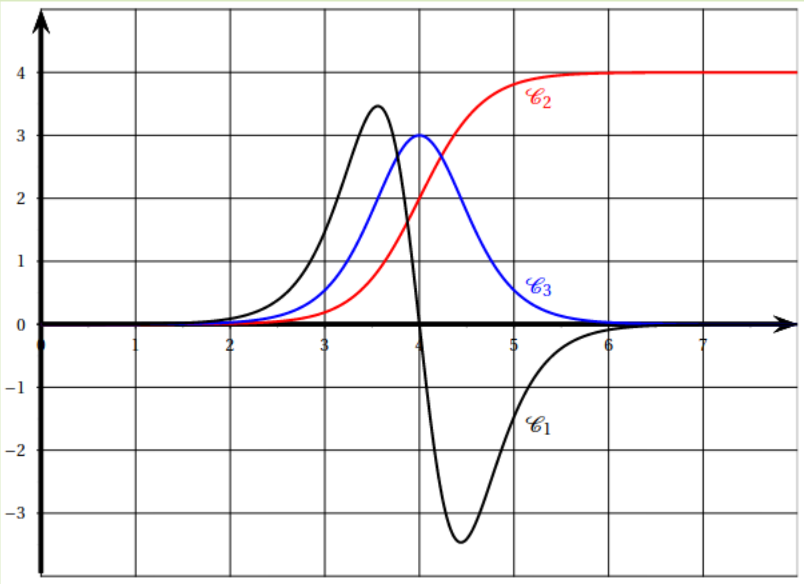
1. Satisfaction convexe puis concave point. Envie croissante puis décroissante.
2. Limite de 90 donc pas de saturation possible.
3. 
4. $\mathrm{e}^{-0,25x+6} - 1 \geqslant 0 \iff x \leqslant 24$.
5. À partir d'un salaire de 24 000 euros.

Exercice 9. D

*Les parties* A *et* B *peuvent être traitées indépendamment*

**Partie A**

Le plan est ramené à un repère orthogonal.
On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction $f$ définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que celle de sa dérivée $f'$ et de sa dérivée seconde $f''$.




1. Déterminer, en justifiant votre choix, quelle courbe correspond à quelle fonction.
2. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_2$ au point d'abscisse 4.
3. Donner avec la précision permise par le graphique, l'abscisse de chaque point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_1$.

Exercice 9. (suite)

**Partie B**

Soit un réel $k$ strictement positif.
On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{4}{1+\mathrm{e}^{-kx}}.$$

1. Déterminer les limites de $g$ en $+\infty$ et en $-\infty$,
2. Prouver que $g'(0) = k$.
3. En admettant le résultat ci-dessous obtenu avec un logiciel de calcul formel, prouver que la courbe de $g$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

| ▷ Calcul formel | |
|---|---|
| 1 | g(x) =4/(1 + e^(-kx)) <br> $\rightarrow g(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^{-kx}+1}$ |
| 2 | Simplifier($g''(x)$) <br> $\rightarrow g''(x) = -4\mathrm{e}^{kx}\left(\mathrm{e}^{kx}-1\right)\dfrac{k^2}{\left(\mathrm{e}^{kx}+1\right)^3}$ |

Correction de l'exercice 9

A

1. $\mathscr{C}_1$ correspond à $f'$, $\mathscr{C}_3$ à $f'$ et $\mathscr{C}_2$ à $f$.
2. $f'(4) = 0$
3. $3,4,\ 4,\ 4,6.$

B

1. $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 4$ et $\lim_{x\to-\infty} = 0.$
2. $g'(x) = \frac{4k\mathrm{e}^{-kx}}{(1+\mathrm{e}^{-kx}}$ et donc $g'(0) = k$.
3. $g''(x) = 0 \iff \mathrm{e}^{kx} - 1 = 0 \iff kx = 0 \iff x = 0.$

Exercice 10. D

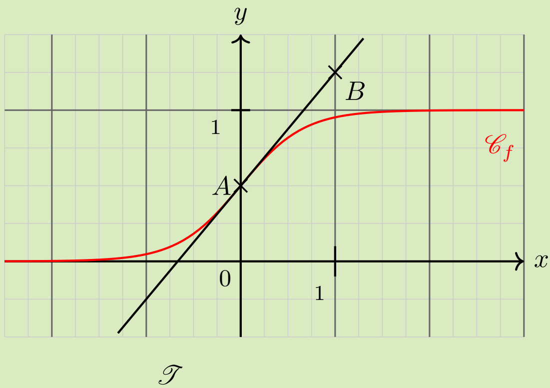
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-3x}}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On nomme A le point de coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1\ ;\ \frac{5}{4}\right)$.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.




**Partie A : lectures graphiques**

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction $f$ semble convexe ou concave.

Exercice 10. (suite)

**Partie B : étude de la fonction**

1. On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée $f'$.
2. Justifier que la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $f$.
   (b) Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction [.
4. Déterminer la valeur exacte de la solution $\alpha$ de l'équation $f(x) = 0,99$.

**Partie C : Tangente et convexité**

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   On admet que la fonction $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On note $f''$ la fonction dérivée seconde de la fonction $f$.
   On admet que $f''$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f''(x) = \frac{9\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x} - 1\right)}{\left(1 + \mathrm{e}^{-3x}\right)^3}.$$
2. Étudier le signe de la fonction $f''$ sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction $f$ est convexe.
   (b) Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$ ?
   (c) En déduire la position relative de la tangente $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$.
   Justifier la réponse.

Exercice 11. E