29 Projeté orthogonal.

I Projeté orthogonal.

II Distance d'un point à un plan.

III Distance d'un point à une droite.

IV Exercices.

Exercice 1. B

On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1. On note L, I et J les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[EF]$ et $[HG]$ et K le centre du carré $BCGF$.

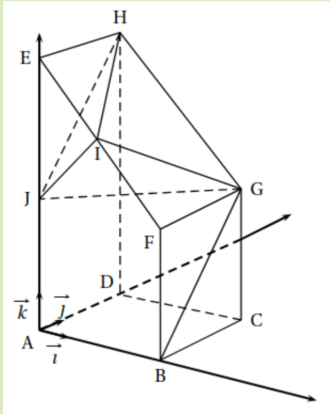
1. Citez une base orthonormée de l'espace en utilisant les points cités.
2. Citez deux repères orthonormés de l'espace en utilisant les points cités.
3. On se place dans le repère de l'espace $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.
   (a) Démontrez que $\overrightarrow{LK}$ est normal au plan (IJB).
   (b) Déduisez-en la distance du point L au plan (IJB).

Correction de l'exercice 1

1. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.
2. $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ et $\left(E;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$
3. (a) $I\left(\frac{1}{2},0;1\right)$, $J\left(\frac{1}{2},1;1\right)$, $B(1,0,0)$.
   $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}-1/2\\1\\1\end{pmatrix}$.
   $L\left(0,1,0\right)$ et $K\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
   $\overrightarrow{LK}\begin{pmatrix}1\\0\\1/2\end{pmatrix}$.
   (b) $d(L,(IJB))=\frac{\left|\overrightarrow{LB}\cdot\overrightarrow{LK}\right|}{\|\overrightarrow{LK}\|}=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}}$.

Exercice 2. D

On considère le prisme droit ABFEDCGH, de base ABFE, trapèze rectangle en A.



On associe à ce prisme le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ tel que :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{4}\vec{AB}, \quad \vec{\jmath} = \frac{1}{4}\vec{AD}, \quad \vec{k} = \frac{1}{8}\vec{AE}.$$

De plus on a $\vec{BF} = \frac{1}{2}\vec{AE}$.

On note I le milieu du segment [EF].

On note J le milieu du segment [AE].

1. Donner les coordonnées des points I et J.
2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (IGJ).
3. On note L le projeté orthogonal du point H sur le plan (IGJ).
   Montrer que les coordonnées de L sont $\left(\frac{8}{3}\ ;\ \frac{4}{3}\ ;\ \frac{16}{3}\right)$. *On admettra que L $\in$ (IGJ).*
4. Calculer la distance du point H au plan (IGJ).
5. Montrer que le triangle IGJ est rectangle en I.
6. En déduire le volume du tétraèdre IGJH.

   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
   $$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

Correction de l'exercice 2

1. $J(0,0,4)$, $I(2,0,6)$.
2. $G(4,4,4)$. $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.
3. $H(0,4,8)$, $\overrightarrow{LH}\begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$ donc $\frac{8}{3}\vec{n} = \overrightarrow{LH}$. Donc $\overrightarrow{LH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, enfin $\overrightarrow{LH}$ est

normal à (IGJ). Comme de plus $L \in (IGJ)$, L est le projeté orthogonal de H sur (IGJ).

4. $d(H;(IGJ)) = HL$. Le repère étant orthonormé :

$$\begin{aligned} HL &= \left\| \overrightarrow{HL} \right\| \\ &= \sqrt{\left(-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} \\ &= \frac{64}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

5.

$$\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$$

Le repère étant orthonormé

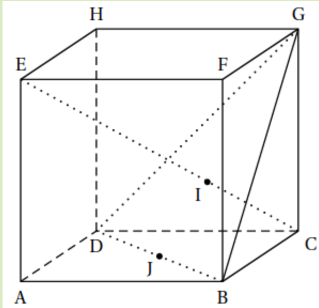
$$\boxed{IGJ \text{ est rectangle en } I.}$$

6.

$$\begin{aligned} \mathscr{V} &= \frac{1}{3} \times \mathscr{A}(IGJ) \times HL \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times IG \times IJ \times \frac{64}{3}\sqrt{3} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} \times \frac{64}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Exercice 3. D

On considère le cube ABCDEFCH d'arête 1.
On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC).
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\ ;\ \vec{AB},\ \vec{AD},\ \vec{AE}\right)$.



1. Donner dans ce repère les coordonnées des points E, C, G.
2. Démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD).
3. (a) Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.
   (b) En déduire que la distance du point E au plan (GBD) est égale à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
4. (a) Démontrer que le triangle BDG est équilatéral.
   (b) Calculer l'aire du triangle BDG.
   On pourra utiliser le point J, milieu du segment [BD].
5. Justifier que le volume du tétraèdre EGBD est égal à $\frac{1}{3}$.

   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}Bh$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est la hauteur relative à cette base.

Correction de l'exercice 3

1. $E(0,0,1)$, $C(1,1,0)$, $G(1,1,1)$.
2. $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{GD}$.
3. (a) Soit $Z\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.
   * $\overrightarrow{GZ} = \begin{pmatrix}-1/3\\-1/3\\-2/3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{GZ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{GZ}$. Donc $Z \in (GBD)$.
   * $\overrightarrow{ZE}\begin{pmatrix}-2/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{ZE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EC}$.

   Donc $Z \in (EC)$.

$$\boxed{Z = I.}$$

(b) Le repère étant orthonormé

$$\begin{aligned}
d(E,(GBD)) &= EI \\
&= \left\|\overrightarrow{EI}\right\| \\
&= \sqrt{\left(\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2} \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

4. (a) $BD = GB = GD = \sqrt{2}$.

   (b) Théorème de Pythagore : $GJ = \frac{1}{2}\sqrt{6}$. Donc $\mathscr{A}(BDG) = \frac{1}{2}BD \times GJ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

5.

$$\begin{aligned}
\mathscr{V} &= \frac{1}{3}\mathscr{A}(BDG)EI \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\sqrt{3} \times \frac{2}{3}\sqrt{3} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$