28 Dériver des fonctions composées.

I Cas général.

II Des cas particuliers à connaître par cœur.

III Exercices.

Exercice 1.

Donnez le domaine de dérivabilité et calculez la dérivée de la fonction f dans les cas suivants.

a) $f : x \mapsto \sqrt{-4x^2+16}$.

b) $f : x \mapsto 4x + 5\mathrm{e}^{-2x+3}$.

c) $f : x \mapsto \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-4x}}$.

d) $f : x \mapsto \dfrac{1}{3x^2+9x+6}$.

e) $f : x \mapsto (\sqrt{x}+3)^4$.

f) $f : x \mapsto \dfrac{3x-5}{\mathrm{e}^{3x-5}}$.

g) $f : x \mapsto (2x^3-7x)^5$.

h) $f : x \mapsto \cos(3x)$.

i) $f : x \mapsto \sqrt{3x^2+1}$.

j) $f : x \mapsto \sqrt{4x^2+4x+1}$.

k) $f : x \mapsto \sqrt{x^2-3x-2}$.

l) $f : x \mapsto \left(5x^3-4\right)^2$.

m) $f : x \mapsto (5x^4-3x+2)^6$.

n) $f : x \mapsto \left(\dfrac{1}{x+6}\right)^3$.

<u>Correction de l'exercice 1</u>

a) $u'(x) = -\frac{4x}{\sqrt{-4x^2+16}}$ et $\mathscr{D}_{f'} =]-2;2[$.

b) $u'(x) = 4 + -10\mathrm{e}^{-2x+3}$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

c) $u'(x) = \frac{8\mathrm{e}^{-4x}}{(1+\mathrm{e}^{-4x})^2}$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

d) $u'(x) = -\frac{6x+9}{(3x^2+9x+6)^2}$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1,-2\}$.

e) $u'(x) = 2\frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x}+3)^3$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}_+^*$.

f) $u'(x) = \frac{3\mathrm{e}^{3x-5}-3(3x-5)\mathrm{e}^{3x-5}}{(\mathrm{e}^{3x-5})^2} = \frac{(-9x+18)\mathrm{e}^{3x-5}}{(\mathrm{e}^{3x-5})^2}$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

g) $u'(x) = 5(6x^2-7)(2x^3-7x)^4$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

h) $u'(x) = -3\sin(x)$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

i) $u'(x) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

j) $u'(x) = \frac{4x+2}{\sqrt{4x^2+4x+1}}$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

k) $u'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x-2}}$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right\}$.

l) $u'(x) = 30x^2(5x^3-4)$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

m) $u'(x) = 6(20x^3-3)(5x^4-3x+2)^5$ et $\mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

n) $u'(x) = \frac{-3}{(x+6)^4}$.

Exercice 2.

Donnez le domaine de dérivabilité, calculez la dérivée de la fonction u puis donnez son tableau de variation dans les cas suivants.

a) $h : x \mapsto (2x-4)\mathrm{e}^{-5x}$.

b) $h : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2x-1}{2x+1}}$.

c) $h : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{x} - 6$.

d) $h : x \mapsto \dfrac{77}{1+\mathrm{e}^{39-0,02x}} + 4$.

e) $h : x \mapsto x\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 1 + x$.

Correction de l'exercice 2

a) $h'(x) = [2-5(2x-4)]\mathrm{e}^{-5x} = 2(-5x+11)\mathrm{e}^{-5x}$.

x	$-\infty$		$\frac{11}{5}$		$+\infty$
h'		$+$	0	$-$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-5}$	$\searrow$	0

b) $h'(x) = \frac{4}{(2x+1)^2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
h'		$+$				$+$	
h	1	$\nearrow$	$+\infty$		0	$\nearrow$	1

c) $h'(x) = \mathrm{e}^{x}(2\mathrm{e}^{x}+4)$. h' strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d) $h'(x) = \frac{0{,}02\times 77\mathrm{e}^{39-0{,}02x}}{(1+\mathrm{e}^{39-0{,}02x})^2}$. h' et strictement croissante.

e) $h'(x) = [1-2(x+1)]\,\mathrm{e}^{-2x}+1$. h est croissante avec dérivée seconde.

Exercice 3. C

Calculer une dérivée.

Exercices 53 à 58 page 155 du Sésamath.

Correction de l'exercice 3

Exercice 53 : $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x+2}$.
Exercice 54 : $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.
Exercice 55 : $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)$.
Exercice 56 : $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
Exercice 57 : $f'(x) = -4\sin(4x)$.
Exercice 58 : $f'(x) = -12\mathrm{e}^{-x}\left(4\mathrm{e}^{-x}+1\right)^2$.

Exercice 4. C

Étudier une fonction.

Exercices 87 à 89 page 158 du Sésamath.

Exercice 5. C

Étudier une fonction.

Exercices 111 et 112 page 160 du Sésamath.

Correction de l'exercice 5

Exercice 112 page 160 du Sésamath.

1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $f'(2) = 0$.
2. (a) $f'(x) = x(2-x)\mathrm{e}^{-x+1}$.
   (b)

x	0		2		$+\infty$
x	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$	0	$-$	
f'	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	0

(c) $y = f'(4)(x-4) + f(4)$, $y = -8\mathrm{e}^{-3}x + (32+16)\mathrm{e}^{-3}$.

3. (a) $f''(x) = (2-2x)\mathrm{e}^{-x+1} - (2x-x^2)\mathrm{e}^{-1+x} = (x^2-4x+2)\mathrm{e}^{-1+x} = (x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})\mathrm{e}^{-1+x}$. f est convexe sur $]-\infty; 2-\sqrt{3}[$ et sur $]2+\sqrt{3};+\infty[$. Elle est concave sur $]2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}[$.

4. $g'(x) = -f'(x)\mathrm{e}^{f(x)} = -x(2-x)\mathrm{e}^{x+1}\mathrm{e}^{f(x)}$.
$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

x	0		2		$+\infty$
g'	0	$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	$\exp\left(4\mathrm{e}^{-1}\right)$	$\nearrow$	1

5. $h'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{x(2-x)\mathrm{e}^{x+1}}{2\sqrt{f(x)}}$.
$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = \sqrt{0} = 0$.

x	0		2		$+\infty$
h'	0	$+$	0	$-$	
h	0	$\nearrow$	$\sqrt{4\mathrm{e}^{-1}}$	$\searrow$	0

Exercice 6. C

Étudier une fonction en utilisant monotonie et composition.
Exercices 61 à 64 page 155 du Sésamath.