

28 Dériver des fonctions composées.

Nous avons déjà vu en première que si $u(x) = ax + b$ alors la dérivée de $x \mapsto g(ax + b)$ est $x \mapsto ag'(ax + b)$.

I Cas général.

Proposition 1

Soient :

- . I et J des intervalles,
- . $u : I \rightarrow J$ une fonction définie sur I ,
- . $v : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur J .

Si u est dérivable sur I et si v est dérivable sur J alors $v \circ u$ est dérivable sur I et

$$(v \circ u)' = v' \circ u \times u'.$$

II Des cas particuliers à connaître par cœur.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(e^u)' = u'e^u, \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, \quad (u^n)' = nu'u^{n-1}, \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}, \quad \left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}.$$

III Exercices.

Exercice 1.

Donnez le domaine de dérivabilité et calculez la dérivée de la fonction f dans les cas suivants.

a) $f : x \mapsto \sqrt{-4x^2 + 16}$.

b) $f : x \mapsto 4x + 5e^{-2x+3}$.

c) $f : x \mapsto \frac{2}{1 + e^{-4x}}$.

d) $f : x \mapsto \frac{1}{3x^2 + 9x + 6}$.

e) $f : x \mapsto (\sqrt{x} + 3)^4$.

f) $f : x \mapsto \frac{3x - 5}{e^{3x-5}}$.

g) $f : x \mapsto (2x^3 - 7x)^5$.

h) $f : x \mapsto \cos(3x)$.

i) $f : x \mapsto \sqrt{3x^2 + 1}$.

j) $f : x \mapsto \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$.

k) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x - 2}$.

l) $f : x \mapsto (5x^3 - 4)^2$.

m) $f : x \mapsto (5x^4 - 3x + 2)^6$.

n) $f : x \mapsto \left(\frac{1}{x+6}\right)^3$.

Exercice 2.

Donnez le domaine de dérivabilité, calculez la dérivée de la fonction u puis donnez son tableau de variation dans les cas suivants.

a) $h : x \mapsto (2x - 4)e^{-5x}$.

b) $h : x \mapsto \sqrt{\frac{2x - 1}{2x + 1}}$.

c) $h : x \mapsto e^{2x} + 4e^x - 6$.

d) $h : x \mapsto \frac{77}{1 + e^{39-0,02x}} + 4$.

e) $h : x \mapsto xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 + x$.

Exercice 3. C

Calculer une dérivée.

Exercices 53 à 58 page 155 du Sésamath.

Exercice 4. C

Étudier une fonction.

Exercices 87 à 89 page 158 du Sésamath.

Exercice 5. C

Étudier une fonction.

Exercices 111 et 112 page 160 du Sésamath.

Exercice 6. C

Étudier une fonction en utilisant monotonie et composition.

Exercices 61 à 64 page 155 du Sésamath.

