27 Orthogonalité et parallélisme dans l'espace.

I Vecteur normal.

II Définitions.

III Projeté orthogonal.

IV Exercices.

Exercice 1. B

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

1. Montrez que $\overrightarrow{CG}$ est normal à (FGH).
2. Démontrez que $\overrightarrow{AH}$ et normal à (EDC).

Exercice 2. C

Dans chaque cas déterminez si le vecteur $\vec{w}$ est normal à un plan $\mathscr{P}$ de base $(\vec{u}, \vec{v})$.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}12\\-4\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-7\\8\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-11\\-78\\-60\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}10\\-3\\13\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\3\\5\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}10\\-1\\8/7\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}1/2\\3\\-7/4\end{pmatrix}$.

Exercice 3. C

On se place dans un repère de l'espace. Soient $\mathscr{D}$ la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par le point A et $\mathscr{D}'$ la droite de vecteur directeur $\vec{v}$ et passant par le point B. Déterminez si les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales.

a) $A(13;-6;1)$, $B(3;4;-7)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-4\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix}$.

b) $A(-5;23;7)$, $B(1;9;4)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-4\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-3\\7\end{pmatrix}$.

c) $A(11;2;-3)$, $B(-3;2;5)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}9\\-2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0,2\\0,3\\0,4\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = -7 \neq 0$ donc les droites ne sont pas orthogonales.

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ donc les droites sont orthogonales.

c) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ donc les droites sont orthogonales.

Exercice 4. C

Dans le repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$, on donne $A(2,-3,4)$, $B(1,2,-11)$, $C(-4,5,-9)$, $D(-8,3,4)$ et $E(-3,10,6)$.

1. Démontrez que les points A, B et C définissent bien un plan.
2. Démontrez que les droites (AB) et (DE) sont orthogonales.
3. Démontrez que la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

Correction de l'exercice 4

1. * $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\8\\-13\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-10\\6\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ et $\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$.

   * $\begin{vmatrix}-6 & -10\\ 8 & 6\end{vmatrix} = -6\times 6 - 8\times(-10) = 44 \neq 0$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

   Ainsi $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est une base d'un plan et enfin

   $$\boxed{A,\ B \text{ et } C \text{ définissent bien un plan.}}$$

2. $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}5\\7\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE} = -6\times 5 + 8\times 7 - 13\times 2 = 0$.

3. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE} = 0$.

Exercice 5. C

L'espace étant muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(2,-3,5)$, $B(1,0,7)$ et $C(-4,1,3)$.

1. Démontrez que A, B et C définissent bien un plan.
2. Démontrez que $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Exercice 6. C

Soit $\mathscr{P}$ un plan dirigé par deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$ (autrement dit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une base de $\mathscr{P}$). Déterminez les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à $\mathscr{P}$.

Correction de l'exercice 6

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Supposons par exemple $x = 1$.

$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ donc $1 \times 1 + 1 \times y + 2 \times z = 0$ et $-1 \times 1 + 2 \times y + -3 \times z = 0$.

Donc

$$\begin{cases} y + z = -1 \\ 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

$z = -\frac{3}{5}$ et $y = -\frac{4}{5}$.

Exercice 7. D

Dans un repère orthonormé de l'espace on considère les points $A(-4;0;0)$, $B(0;-3;0)$, $C(3;1;0)$, $D(-1;4;0)$, $E(-4;0;5)$, $F(0;-3;5)$, $G(3;1;5)$ et $H(-1;4;5)$.

1. Montrer que ce solide $ABCDEFGH$ est un cube.
2. Soient I et j les milieux respectifs des segments $[FG]$ et $[FB]$. On souhaite montrer que les droites (AJ) et (JH) sont perpendiculaires.

   (a) Déterminez les coordonnées des points I et J, puis montrez que les droites (AJ) et (JH) sont orthogonales.

   (b) Montrez que le point $K\left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{2}{3}; \dfrac{10}{3}\right)$ appartient aux droites (AI) et (JH). Concluez