27 Orthogonalité et parallélisme dans l'espace.

I Vecteur normal.

Nous avons vu que pour définir une droite du plan on peut en donner un point et, soit un vecteur directeur, soit un vecteur normal. Pour un plan un vecteur directeur ne suffit pas ; pour définir la direction d'un plan il faut une base du plan (deux vecteurs non nuls et non colinéaires). Que serait un vecteur normal à un plan ?

Définition 1

Soient :

. $\mathscr{P}$ un plan de l'espace,

. $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathscr{P}$,

. $\vec{n}$ un vecteur non nul.

Nous dirons que $\vec{n}$ est *normal à $\mathscr{P}$* si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Remarques.

1. Tout plan admet un vecteur normal. Si c'est intuitif, la justification apparaîtra clairement avec les équations cartésienne du plan.
2. Si $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs d'une base alors il est orthogonal à tous les vecteurs de la direction du plan puisque les vecteurs sont des combinaisons linéaires des vecteurs de la base (confer proposition infra).
3. Il n'y a pas unicité du vecteur normal. Tout vecteur colinéaire à un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est encore un vecteur normal à $\mathscr{P}$. Plus précisément l'ensemble des vecteur normaux à $\mathscr{P}$ est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{n}$ (un quelconque vecteur normal).

Proposition 1

Un vecteur non nul est normal à un plan si et seulement si il est orthogonal à tout vecteur de la direction de ce plan.

Démonstration

Soient $\mathscr{P}$ un plan.

* Supposons que $\vec{n}$ est orthogonal à tous les vecteurs de la direction de $\mathscr{P}$ et montrons que $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs de tute base de $\mathscr{P}$.

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de la direction de $\mathscr{P}$.

En particulier $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{i}$ et à $\vec{j}$ qui sont des vecteurs de la direction de $\mathscr{P}$.

* Supposons que $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ d'une direction de $\mathscr{P}$ et montrons qu'alors $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de la direction de $\mathscr{P}$.

Soit $\vec{u}$ une vecteur de la direction de $\mathscr{P}$. Ainsi $\vec{u}$ est une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$: $\exists (a,) \in \mathbb{R}^2,\ \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$.
Nous vérifions que

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{u} &= \vec{n}\left(a\vec{i} + b\vec{j}\right)\\ &= a\vec{n} \cdot \vec{i} + b\vec{n} \cdot \vec{j}\end{aligned}$$

Et puisque $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{i}$ et $\vec{j}$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$$

■

Proposition 2

> Étant donné un vecteur non nul $\vec{n}$ et un point A, il existe un unique plan normal à $\vec{n}$ et passant par A.

Remarques.

1. Ainsi pour définir un plan on peut au choix donner :
   (i) trois points distincts deux à deux et non alignés,
   (ii) un point et une base,
   (iii) un point et un vecteur normal.
2. Une façon de voir que nous utiliserons plus tard pour l'équation cartésienne : le plan est formé de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

II Définitions.

Définition 2

(i) Une droite est *parallèle* à une autre droite si au moins un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre.

(ii) Deux droites sont *orthogonales* si un vecteur directeur de l'une est orthogonale à une vecteur directeur de l'autre.

(iii) Une droite est *orthogonale* à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est colinéaire à un vecteur normal à ce plan.

(iv) Un droite est *parallèle* à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est orthogonal à vecteur normal à ce plan.

(v) Deux plans sont *parallèles* si et seulement si un vecteur normal à l'un est colinéaire à un vecteur normal de l'autre.

(vi) Deux plans sont dit *perpendiculaires* si un vecteur normal à l'un est orthogonal à un vecteur normal à l'autre.

III Projeté orthogonal.

Vous avez vu en seconde le projeté orthogonal d'un point sur une droite. Voyons en trois dimensions.

Proposition 3 et définition.

Soient A un point et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace.
Il existe un unique plan $\mathscr{P}$ orthogonal à $\mathscr{D}$ et contenant A. $\mathscr{D}$ est sécante avec $\mathscr{P}$ en un unique point appelé *le projeté orthogonal* de A sur $\mathscr{D}$.

Soient A un point et $\mathscr{P}$ une droite de l'espace.
Il existe un unique plan $\mathscr{D}$ orthogonal à $\mathscr{P}$ et contenant A. $\mathscr{P}$ est sécant avec $\mathscr{D}$ en un unique point appelé *le projeté orthogonal* de A sur $\mathscr{P}$.

Remarques.

1. La dualité de ces deux définitions est remarquable.

IV Exercices.

Exercice 1. B

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

1. Montrez que $\overrightarrow{CG}$ est normal à (FGH).
2. Démontrez que $\overrightarrow{AH}$ et normal à (EDC).

Exercice 2. C

Dans chaque cas déterminez si le vecteur $\vec{w}$ est normal à un plan $\mathscr{P}$ de base $(\vec{u}, \vec{v})$.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}12\\-4\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-7\\8\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-11\\-78\\-60\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}10\\-3\\13\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\3\\5\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}10\\-1\\8/7\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}1/2\\3\\-7/4\end{pmatrix}$.

Exercice 3. C

On se place dans un repère de l'espace. Soient $\mathscr{D}$ la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par le point A et $\mathscr{D}'$ la droite de vecteur directeur $\vec{v}$ et passant par le point B. Déterminez si les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales.

a) $A(13;-6;1)$, $B(3;4;-7)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-4\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix}$.

b) $A(-5;23;7)$, $B(1;9;4)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-4\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-3\\7\end{pmatrix}$.

c) $A(11;2;-3)$, $B(-3;2;5)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}9\\-2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0,2\\0,3\\0,4\end{pmatrix}$.

Exercice 4. C

Dans le repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$, on donne $A(2,-3,4)$, $B(1,2,-11)$, $C(-4,5,-9)$, $D(-8,3,4)$ et $E(-3,10,6)$.

1. Démontrez que les points A, B et C définissent bien un plan.
2. Démontrez que les droites (AB) et (DE) sont orthogonales.
3. Démontrez que la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

Exercice 5. C

L'espace étant muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(2,-3,5)$, $B(1,0,7)$ et $C(-4,1,3)$.

1. Démontrez que A, B et C définissent bien un plan.
2. Démontrez que $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Exercice 6. C

Soit $\mathscr{P}$ un plan dirigé par deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$ (autrement dit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base de $\mathscr{P}$). Déterminez les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à $\mathscr{P}$.

Exercice 7. C

Soit $ABCD$ un tétraèdre.
L'espace est rapporté au repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.
On appelle I et J les milieux respectifs de $[DC]$ et de $[BC]$.
Soient E et F les points définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

1. Déterminez les coordonnées des points I, J, E et F.
2. Démontrez que (EF) est parallèle à (IJ).

Exercice 8. D

Dans un repère orthonormé de l'espace on considère les points $A(-4;0;0)$, $B(0;-3;0)$, $C(3;1;0)$, $D(-1;4;0)$, $E(-4;0;5)$, $F(0;-3;5)$, $G(3;1;5)$ et $H(-1;4;5)$.

1. Montrer que ce solide $ABCDEFGH$ est un cube.
2. Soient I et J les milieux respectifs des segments $[FG]$ et $[FB]$. On souhaite montrer que les droites (AI) et (JH) sont perpendiculaires.
   (a) Déterminez les coordonnées des points I et J, puis montrez que les droites (AI) et (JH) sont orthogonales.
   (b) Montrez que le point $K\left(-\dfrac{1}{3}; -\dfrac{2}{3}; \dfrac{10}{3}\right)$ appartient aux droites (AI) et (JH). Concluez