

26 Croissances comparées.

Proposition 1 - Croissances comparées.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.
- (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
- (iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Démonstration

- (i) La recherche de la limite de $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ en $+\infty$ relève d'une forme indéterminée, mais de

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \end{array} \right.$$

nous déduisons : $\frac{e^x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Or

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{n^n} \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} \right)^n$$

donc par composition $\frac{e^x}{x^n} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

- (ii) Découle de (i) par passage à l'inverse et composition.
- (iii) Il s'agit du taux d'accroissement de exponentielle entre 0 et $0+x$. Le résultat découle donc de la dérivabilité et du calcul de $\exp'(0)$.
- (iv) D'après (i), par produit, $\sqrt{x} \frac{e^x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

■

Remarques.

1. Ce résultat permet parfois de lever l'indétermination pour les formes indéterminées $\frac{\infty}{\infty}$.

Exercice 1. C

Déterminez les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3xe^x + 2e^x - 1.$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - e^2x - x^3e^x.$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{4e^x}{x}.$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{e^x}{2x^2}.$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{4e^x}{\sqrt{x}}.$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}e^x}{x}.$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{e}.$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 3x}{e^x}.$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - 1)e^x.$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 3)e^x.$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - e^x.$

l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - 2e^x.$

m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - xe^x.$

n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)e^x.$

Exercice 2. C

Exercice 103 page 70 du Sésamath.

Exercice 3. D

Étudiez la fonction $f : x \mapsto (2x^3 - 4x^2)e^{-x}$. Vous donnerez notamment son tableau de variation en précisant ses éventuelle asymptotes.

Exercice 4. C

Exercice 105 page 70 du Sésamath.