25 Bases orthonormées de l'espace.

Le produit scalaire peut-il être défini uniquement par les coordonnées ? La réponse est en général non si nous souhaitons conserver les notions de longueur et de perpendicularité usuelles.

Cette leçon nous place dans les conditions pour que l'orthogonalité coïncide avec la perpendicularité et la norme avec la longueur au sens usuel pour un produit scalaire construit à partir des coordonnées.

I Base orthonormée, repère orthonormé.

Définition 1

(i) On appelle *base orthonormale de l'espace* tout triplet $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de trois vecteurs de l'espace tel que $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ et $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}|| = 1$.

(ii) On appelle *repère orthonormal de l'espace* tout quadruplet $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ où O est un point et $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base orthonormale.

II Produit scalaire et coordonnées.

Proposition 1 - Perpendicularité dans l'espace.

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ et $C(x_C, y_C, z_C)$. trois points distincts deux à deux de l'espace leur coordonnées étant données relativement à une base orthonormée.

$(AB) \perp (AC)$ si et seulement si $x_{\overrightarrow{AB}} x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\overrightarrow{AB}} y_{\overrightarrow{AC}} + z_{\overrightarrow{AB}} z_{\overrightarrow{AC}} = 0$

Proposition 2 - Distance euclidienne dans l'espace.

Soient :
. $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace,
. $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace.

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

III Exercices.

Exercice 1. A

Dans un repère de l'espace démontrez que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Exercice 2. C

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère les points $A(1, 7, -2)$, $B(4, 6, -5)$ et $C(3, 1, 2)$.

1. Justifiez que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
2. Qu'en déduisez-vous pour le triangle ABC.

Exercice 3. C

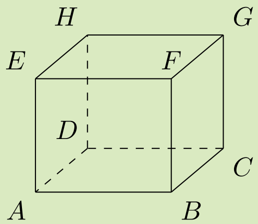
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé on considère les points $A(4, -2, 0)$, $B(6, 4, -2)$ et $C(12, 6, 0)$. Quelle la nature du triangle ABC ?

Exercice 4. C

L'espace étant rapporté à une repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, $A(3, 2, 1)$, $B(-2, 1, 5)$ et $C(1, 0, 1)$. Déterminez une valeur approchée au degré près de $\widehat{ABC}$.

Exercice 5. C

On considère le cube $ABCDEFGH$ qui est représenté ci-dessous.



Dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées : $M\left(1; 1; \frac{3}{4}\right)$, $N\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$, $P\left(1; 0; -\frac{5}{4}\right)$.

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
2. Placer les points M, N et P sur la figure donnée.
3. Justifier que les points M, N et P ne sont pas alignés.
   Dès lors les trois points définissent le plan (MNP).
4. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$, puis en déduire la nature du triangle MNP.
   (b) Calculer l'aire du triangle MNP.