24 Variables aléatoires et moments.

Nous nous limiterons à des univers finis.

I Notion de variable aléatoire finie.

Définition 1

Nous appellerons *variable aléatoire* sur Ω un ensemble fini toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Proposition 1

Soient :

. Ω un ensemble fini,

. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une application.

Les $\{X = a\}$ pour $a \in X(\Omega)$ (ou $a \in \mathbb{R}$) forment un système complet d'événements.

Nous appellerons *loi de probabilité de la variable aléatoire* X et nous noterons parfois $\mathbb{P}_X$, la distribution de probabilité $(a; \mathbb{P}(X = a))_{a\in\Omega}$. Si $X(\Omega)$ est fini (et de cardinal pas trop grand) on présente cette loi sous forme d'un tableau (comme vous l'avez fait en première).

Proposition 2

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un ensemble (fini),

. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire.

$$\mathbb{P}(X = a) = \sum_{\{\omega\in\Omega \ | \ X(\omega)=a\}} \mathbb{P}(\omega).$$

Proposition 3

$\mathbb{P}(X \in A) = \sum \mathbb{P}(X = a)$.

Proposition 4

Soient :

. Ω une ensemble fini,

. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire,

. $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une application.

$g \circ X$ est une variable aléatoire sur Ω que nous noterons $g(X)$.

II Somme de variables aléatoires.

Proposition 5

Soient :

. Ω un ensemble fini,

. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire,

. $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire.

L'application Z définie sur Ω par

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$$

est une variable aléatoire sur Ω appelée *somme des variables aléatoires X et Y*.

III Indépendance de variables aléatoires.

Définition 2

Deux variables aléatoires finies $X : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ sont dites *indépendantes* si pour tout $x \in X(\Omega_1)$ et tout $y \in Y(\Omega_2)$, $\mathbb{P}(\{X = x\} \text{ et } \{Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$.

IV Espérance.

Définition 3

Soit X une variable aléatoire sur un univers Ω.
Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors on appelle espérance de X le nombre réel

$$E(X) := \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Proposition 6

(i) Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ alors $E(X) = p$.
(ii) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$.
(iii) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$ alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Théorème 1 - Formule du transfert.

Soient :

. Ω un ensemble,

. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire finie.

Pour toute fonction f définie sur $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $E(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)$.

Proposition 7

(i) $E(aX + b) = aE(X) + b$.
(ii) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
(iii) Si $X \leqslant Y$ alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

V Variance et écart-type.

Définition 4

Si X admet un moment d'ordre 2 fini alors on appelle variance de X le réel $\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$.
On appelle alors écart-type le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Proposition 8 - Formule de Koenig-Huygens.

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

Proposition 9

Soient $x : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires,

(i) $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

(ii) Si $\mathbb{V}(X) = 0$ alors X est une variable aléatoire certaine.

(iii) Si X et Y sont indépendantes $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Proposition 10

(i) Si X est certaine alors $V(X) = 0$.

(ii) Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ alors $V(X) = p(1 - p)$.

(iii) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n\rrbracket)$ alors $V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$.

(iv) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b\rrbracket)$ alors $V(X) = \dfrac{(b - a + 1)^2 - 1}{12}$.

VI Exercices.

Exercice 1. C

On lance deux dés tétraédriques équilibrés dont les faces sont numérotées 1, 1, 2 et 2 pour le premier et 1, 2, 3 et 3 pour le second.

On note X la variable aléatoire qui à chaque lancé du premier dé associe le numéro inscrit sur la face inférieure et Y celle pour le second dé. Soit $Z = X + Y$.

Déterminez la loi de Z.

Exercice 2. C

Soient $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{3}\right)$, $Y \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{4}\right)$ et $Z = X + Y$.

1. Calculez $\mathbb{P}(Z = 1)$.
2. Déterminez la loi de Z.
3. Calculez $\mathbb{P}_{Z=1}(X = 1)$.
4. Calculez $\mathbb{P}_{X=1}(Z = 2)$.

Exercice 3. C

Une agence constate que le nombre d'appartements vendus chaque mois est une variable aléatoire X dont la loi peut être estimée statistiquement :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$0,02$	$0,06$	$0,08$	$0,25$	$0,2$	$0,13$	$0,12$	$0,08$	$0,06$

Elle a constaté que les ventes des mois successifs étaient indépendantes.

1. Calculez l'espérance et l'écart-type du nombre annuel d'appartements vendus.
2. L'agence touche 1000 € pour la vente d'un appartement et les charges fixes annuelles s'élèvent à 50 000 €.
   Calculez l'espérance et la variance du bénéfice annuel de l'agence.

Exercice 4. C

On admet que la demande journalière de véhicules est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par

x_i	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$0,22$	$0,37$	$0,24$	$0,10$	$0,05$	$0,02$

On suppose que les 3 véhicules de l'agence sont en état de marche.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de véhicules loués à la journée.

1. Déterminez la loi de Y.
2. Calculez l'espérance et la variance de Y.
3. Le prix de la location par jour et par voiture est de 50 €. Les frais supportés par l'agence sont en moyenne de 10 € par voiture et par jour, que le véhicule soit loué ou non, et de 10 € par véhicule loué.
   (a) Exprimez la variable aléatoire B égale au bénéfice journalier en fonction de Y.
   (b) Calculez l'espérance et la variance de B.

Exercice 5. D

Déterminez l'espérance et la variance de la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $[\![1, n]\!]$.

Exercice 6. E

Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de n clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle. Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu.

1. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.
2. En réalité, la soirée était bien arrosée, et après chaque essai, le concierge remet la clef essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.