23 Limites de fonctions.

I Voisinage.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Ainsi a peut être un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $a \in \mathbb{R}$ nous appellerons *voisinage ouvert de a* tout intervalle ouvert contenant a.

Nous appellerons *voisinage ouvert de $+\infty$* tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$.

Nous appellerons *voisinage ouvert de $-\infty$* tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ où $A \in \mathbb{R}$.

Exemples.

1. $]-1,2;0,5[$ est un voisinage ouvert de 0 par contre $]2;4[$ n'en n'est pas un.
2. $]1;4[$ est un voisinage ouvert de π.
3. $]2;3[$ est un voisinage ouvert de e.
4. $]-\infty, 4[$ est un voisinage ouvert de $-\infty$.
5. $\mathbb{R}$ est un voisinage ouvert de n'importe quel nombre, de $+\infty$ et de $-\infty$.

Dans cette leçon nous nous intéressons à ce qui se passe pour $f(x)$ lorsque x se rapproche de valeurs particulières dans l'ensemble de définition ou aux bornes de l'ensemble de définition. Le fait de travailler avec des voisinages signifie pouvoir choisir un ensemble qui nous facilite les choses (ne contenant pas de valeurs interdite, sur lequel la fonction est monotone, ...) : nous nous intéressons aux propriétés asymptotiques.

II Limites.

Une approche intuitive des situations et questions que nous allons rencontrer : fichier Geogebra.

1 Définition.

Définition 1

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

. $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathscr{D}$.

Nous dirons que *f admet ℓ pour limite en a* si et seulement si, quelque soit le voisinage ouvert J de ℓ, il existe un voisinage ouvert I de a tel que :

$$\forall x \in I, \ f(x) \in J.$$

Remarques.

1. Si f admet ℓ pour limite en a alors nous noterons

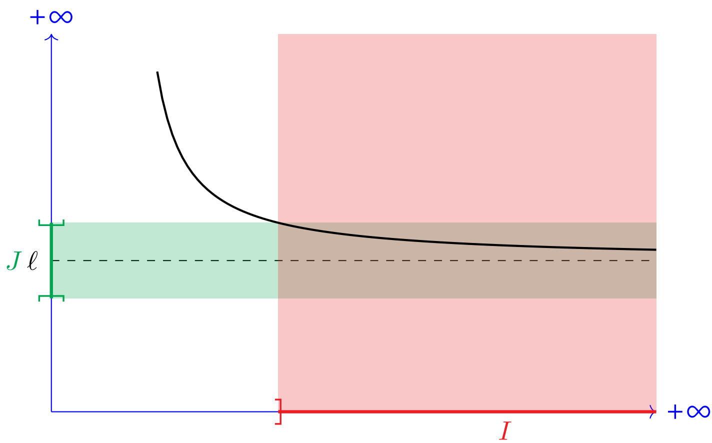
$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

ou

$$\lim_{a} f = \ell.$$

Exemples.

1. Au voisinage de $a = +\infty$, $f(x)$ semble...

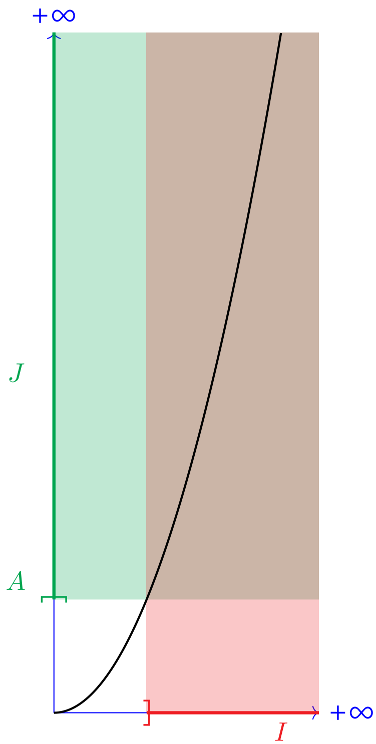


... se rapprocher de $\ell \in \mathbb{R}$.

Quel que soit le voisinage ouvert, $J =]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$, de ℓ, il existe un voisinage I, de $+\infty$, tel que : $\forall x \in I,\ f(x) \in J$.

Nous dirons que *la droite $y = \ell$ est asymptote (horizontale) à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$*.

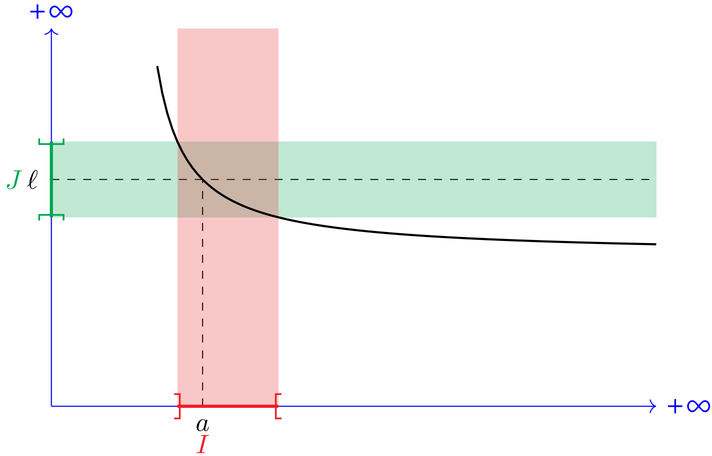
2. Au voisinage de $a = +\infty$, $f(x)$ semble...



... augmenter sans limitation, $f(x)$ tend vers $+\infty$.

Quel que soit le voisinage ouvert, $J =]A, +\infty[$, de $+\infty$, il existe un voisinage I, de $+\infty$, tel que : $\forall x \in I,\ f(x) \in J$.

3. Au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, $f(x)$ semble...



... se rapprocher de $\ell \in \mathbb{R}$.

Quel que soit le voisinage ouvert, $J =]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$, de ℓ, il existe un voisinage I, de a, tel que : $\forall x \in I,\ f(x) \in J$.

2 Exemples de référence.

Proposition 1 - Fonctions puissances.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$.

(i) $x^n \underset{x \to a}{\longrightarrow} a^n$.

(ii) $x^n \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(iii) Si n est pair alors : $x^n \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(iv) Si n est impair alors : $x^n \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Proposition 2 - Fonction racine carrée.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\sqrt{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \sqrt{x} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \sqrt{a}$$

Proposition 3 - Fonction exponentielle.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{e}^x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^x \underset{x \to a}{\longrightarrow} \mathrm{e}^a$$

Remarques.

1. Nous nous ferons désormais un devoir de compléter les tableaux de variations par les limites.
   Ainsi :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   et

x	$-\infty$		$+\infty$
$x \mapsto x^3$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3 Propriété.

Proposition 4 - Unicité de la limite.

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $\ell, \ell' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une application.

Si f admet ℓ et ℓ' pour limites en a alors $\ell = \ell'$.

4 Limites et compositions.

Proposition 5 - Passage à la limite dans une fonction.

Soient :

. $\mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}$,

. $\mathscr{D}_g \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D}_f \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $b \in \mathscr{D}_g \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D}_g \to \mathbb{R}$ des applications telles que $f\left(\mathscr{D}_f\right) \subset \mathscr{D}_g$.

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b \\ \\ g(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right. \Rightarrow g \circ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Remarques.

1. On peut se représenter la chose comme un passage à la limite dans la fonction g :
$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = \lim_{x \to a} g\left[f(x)\right] = g\left[\lim_{x \to a} f(x)\right] = g(b).$$

Exemples.

1. $h : x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ n'est pas une fonction de référence, mais n'est pas non plus une somme, ou un produit, ou un quotient, de fonctions de références. Nous étions pour l'instant impuissant à traiter cette situation.
   Mais en notant $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \mathrm{e}^x$ nous remarquons que $h = g \circ f$ où g et f sont des fonctions de références (ou au moins des sommes, produits quotients de fonctions de référence).

   Étudions la limite de h en $+\infty$.

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ \\ \mathrm{e}^y \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{array}\right. \Rightarrow \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

$$\lim_{+\infty} h = 0.$$

Remarques.

1. En particulier pour les suites $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)$ sous réserve que les limites existent.

III Opérations sur les limites.

On retrouve les mêmes règles que pour les suites. Notamment on retrouve parfois des formes indéterminées.

IV Limites en un réel par valeurs supérieures et inférieures.

Nous avons été confrontés à la forme indéterminée $\frac{\cdot}{0}$. Nous allons voir une approche permettant de lever parfois cette indétermination.

Un exemple typique de la situation qui nous intéresse est celui de la fonction inverse en 0.

Explorons cette nouvelle situation avec Geogebra.

1 Définition.

Définition 2

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathbb{R}$.

. $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une application.

Nous dirons que *f admet ℓ pour limite à gauche en a* si et seulement si, quelque soit le voisinage ouvert J de ℓ, il existe un voisinage ouvert I de a tel que :

$$\forall x \in]-\infty, a[\cap I \cap \mathscr{D},\ f(x) \in J.$$

Remarques.

1. On définit de même la *limite à droite en a* : f admet ℓ pour limite à droite en a si et seulement si, quelque soit le voisinage ouvert J de ℓ, il existe un voisinage ouvert I de a tel que :

$$\forall x \in]a, +\infty[\cap I,\ f(x) \in J.$$

2. Au lieu de dire « limite à droite » nous dirons parfois « *limite par valeurs supérieures* » et au lieu de « limite à gauche » nous dirons tout aussi bien « *limite par valeurs inférieures*.
3. Si f admet ℓ pour limite à droite en a on note :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$$

ou

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell.$$

4. Si $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty$ alors, pour décrire la situation graphique, nous dirons que $\mathscr{C}_f$, *la courbe représentative de f admet une asymptote verticale en a*, ou encore que $\mathscr{C}_f$ *admet une asymptote d'équation $x = a$*.
5. Les résultats précédemment vus sur les limites restent valables pour ces limites à gauche et à droite.

2 Exemples de référence.

Proposition 6 - Fonctions puissances négatives.

Si $n \in \mathbb{N}^*$ est impaire alors :

$$\frac{1}{x^n} \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^n} \underset{\substack{x \to 0 \\ x < 0}}{\longrightarrow} -\infty.$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ est paire alors :

$$\frac{1}{x^n} \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^n} \underset{\substack{x \to 0 \\ x < 0}}{\longrightarrow} +\infty.$$

V Limites et comparaisons.

On retrouve les mêmes résultats que pour les suites.

VI Exercices.

Exercice 1.

Déterminez les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f dans les cas suivants.

a) $f : x \mapsto -2x^7 + 4x^3 + x$.

b) $f : x \mapsto x^3 + 4x^2 - x^4$.

c) $f : x \mapsto \dfrac{2x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1}{4x^3 + 2x + 7}$.

d) $f : x \mapsto \dfrac{2x^3 + 10x^2 + x}{x^{12} + 1}$.

e) $f : x \mapsto \dfrac{7x^{32} - 13x^{17} + x + 2}{-3x^{32} + x + \pi}$.

f) $f : x \mapsto \dfrac{2x^5 - x^3 + x^6}{2x^4 + x^4 + x^7}$.

Exercice 2.

Déterminez les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+3}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{1-0,5x}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} (5-x)^3$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^4}$.

e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{3x-2}$.

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2+x+\mathrm{e}^{-x}}$.

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2+x+1}$.

h) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathrm{e}^{\frac{2}{x}}$.

i) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (2-3\mathrm{e}^{2x})^5$.

j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{4x^2+1}}$.

k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 3x\mathrm{e}^{3x}$.

l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (2-x)\mathrm{e}^{2-x}$.

Exercice 3.

Exercices 54 et 55 page 180 du manuel Lelivrescolaire.

Exercice 4.

Soit f une fonction polynomiale de degré 3. Étudiez les limites de f à l'infini.

Exercice 5. ☢

Déterminez le domaine de définition de la fonction définie par $\varphi : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ et justifiez que sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Justifiez que φ est dérivable sur $]-1;1[$ et calculez $\lim_{x\to-1} \varphi'(x)$, puis tracez la courbe représentative de φ en faisant apparaître toutes les informations précédentes.

Exercice 6. C

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. Pour tout $x \in [0;+\infty[$ calculez $f'(x)$. Déduisez-en les variations de f sur $[0;+\infty[$.

Exercice 7. C

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.
2. Étude de la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ

   Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2$.

   (a) Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

   (b) Justifier que, pour tout réel $x \neq 0$, $h(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$.

   En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

   (c) On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

   (d) Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

   (e) En déduire que, pour tout réel x, $2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$.

   (f) Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ ?
3. Étude de la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

   (a) Pour tout réel x, développer l'expression $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.

   (b) Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
4. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 8. E

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} - 2x + 1$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Étudiez les limites de f aux borne de son domaine de définition.
2. Montrez que (d) : $y = -2x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ quand x tend vers $-\infty$ (autrement dit la limite de $f(x) - (-2x + 1)$ est 0).
3. Étudiez la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite (d) sur $\mathbb{R}$.