22 Changement de variable et composition de fonctions.

I Changement de variable.

Le changement de variable est une méthode algébrique pour simplifier certaines équations ou inéquations et qui trouve de nombreux échos dans les divers domaines mathématiques.

Par exemple pour résoudre l'équation $(2x-1)^3 - 8 = 0$ nous pouvons faire le changement de variable $2x - 1 = t$ l'équation devient alors $t^3 - 8 = 0$. D'où $t = 2$ puis de $2x - 1 = 2$ nous déduisons finalement $x = \frac{3}{2}$.

II Composition de fonctions.

Définition 1

Soient :

. E, F, G et H des ensembles de nombres réels,

. $f : E \to F$ et $g : G \to H$ deux fonctions.

Si $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$ alors nous appellerons *composée de f suivie de g* la fonction notée $g \circ f$ et définie sur $\mathscr{D}_f$ par

$$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ g \circ f(x) = g\left[f(x)\right]$$

Remarques.

1. Nous lirons « f rond g » pour $g \circ f$.
2. La situation peut être schématisée par

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(x) \arrow[r, "g"] & g\left[f(x)\right] \end{tikzcd}$$

3. $\circ$ peut se voir comme une nouvelle opération entre fonctions.

III Exercices.

Exercice 1. C

Procédez au changement de variable proposé puis résolvez l'équation.

a) $e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$, $t = e^{x}$.

b) $x^4 - 1x^2 - 6 = 0$, $t = x^2$.

c) $\dfrac{4}{x^4} - \dfrac{6}{x^2} + 2 = 0$, $t = \dfrac{1}{x^2}$.

d) $-(-2x+3)^2 - 8(-2x+3) + 2 = 0$, $t = -2x + 3$.

e) $-2x + 9\sqrt{x} - 4 = 0$, $t = \sqrt{x}$.

f) $4x^6 + 4x^3 - 6 = 0$, $t = x^3$.

Exercice 2. C

Donnez une expression algébrique des fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ dans les cas suivants.

a) $f(x) = -4x$ et $g(x) = 6x$.

b) $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = -x + 1$.

c) $f(x) = -3x^2 + x + 1$ et $g(x) = -x + 1$.

d) $f(x) = x^3$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

e) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = (x+1)^2$.

f) $f(x) = \ln(x) - 1$ et $g(x) = e^{x+1}$.

g) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ et $g(x) = x^3 \ln(x)$.

h) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$ et $g(x) = x^2 - 3$.

Exercice 3. C

Déterminez le domaine de définition de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans les cas suivants.

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2}}$.

c) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$.

d) $f(x) = \sqrt{-x+1}$.

e) $f(x) = \dfrac{3}{2x-7}$.

f) $f(x) = \dfrac{x+\sqrt(x)}{(2x-3)(5-x)}$.

g) $f(x) = \sqrt{8x+1}$.

h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{\frac{1}{3}x - \frac{5}{7}}}$.

i) $f(x) = \sqrt{(3x+1)(4x-2)}$.

j) $f(x) = \sqrt{\dfrac{7x-6}{5-3x}}$.

k) $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$.

l) $f(x) = \sqrt{|x|}$.

m) $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$.

Exercice 4. D

On considère l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ définie par $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$. Déterminez $f \circ f$.

Exercice 5. D Dans cet exercice, on se propose de résoudre l'équation (E) : 2x4 – 9x3 + 8x² - 9x + 2 = 0 1) a) 0 est-il solution de (E) ? b) Démontrer que (E) équivaut à : 2x² - 9x + 8 –9 x + 2 x² = 0 (E') 2) Pour tout réel x non nul, on pose X = x + 1 x a) Calculer X² en fonction de x. b) Démontrer que (E') équivaut à : X = x + 1 x et 2X² - 9X + 4 = 0 3) En déduire les solutions de (E).

Exercice 6. D

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ?

Quelles que soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f \circ g = g \circ f.$$