21 Produit scalaire de l'espace.

I Définition, généralisation.

Étant donnés trois points A, B et C de l'espace il existe (au moins) un plan $\mathscr{P}$ qui les contient. Nous définirons le produit scalaire, dans l'espace, des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ par le produit scalaire, dans le plan $\mathscr{P}$, des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Autrement dit deux vecteurs de l'espace étant toujours coplanaires il est possible de faire leur produit scalaire comme en première.

II Caractérisation par angle et norme.

Proposition 1 - caractérisation du produit scalaire par norme et angle.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs de l'espace.

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right).$$

Remarques.

1. Pour nous en géométrie norme et longueur sont confondues (ce qui n'est pas vrai si la base n'est pas orthonormée mais nous en parlerons plus tard). Dans les exercices de cette leçon on confondra le deux notions. De même l'angle entre les deux vecteurs est l'angle habituel entre deux droites sécantes (il faudra trouver des représentants judicieux).

III Orthogonalité.

Définition 1

Soient :

. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits *orthogonaux* si et seulement si $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0$.

Remarques.

1. Les droites et les plans étant définis par des vecteurs (le vecteur directeur pour l'une et les vecteurs d'une base pour l'autre) l'orthogonalité de vecteurs va permettre de généraliser l'idée de perpendicularité en parlant d'orthogonalité. Ainsi deux droites non coplanaires pourront être orthogonales.

2. Dans la pratique et dans cette leçon, nous pourrons lire graphiquement que deux vecteurs sont orthogonaux lorsqu'ils sont des vecteurs directeurs de droites perpendiculaires.

IV Propriétés de linéarité.

Proposition 2 - Forme bilinéaire symétrique.

Soient :

. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de l'espace,

. α et β des réels.

(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (commutativité ou symétrie).

(ii) $\vec{u} \cdot \left(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}\right) = \alpha\vec{u} \cdot \vec{v} + \beta\vec{u} \cdot \vec{w}$ (bilinéarité).

V Identités de polarisation.

Corollaire 1 - Identités remarquables.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

(i) $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$.

(ii) $||\vec{u} - \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$.

(iii) $\left(\vec{u} - \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} + \vec{v}\right) = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$.

Proposition 3 - Caractérisation du produit scalaire par les identités de polarisation.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

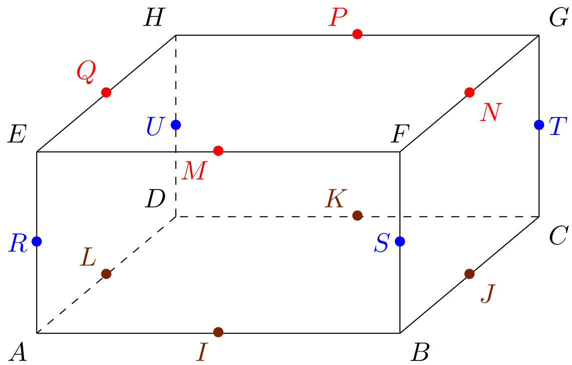
(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$.

(ii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2\right)$.

(iii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2\right)$.

VI Exercices.

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. Les autres points sont les milieux des arêtes.



Exercice 1. B

Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur a calculez les produits scalaires :

a) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EH}$.
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EH}$.
c) $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{CB}$.
d) $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{EB}$.
e) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM}$.
f) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MB}$.
g) $\overrightarrow{DU} \cdot \overrightarrow{IF}$.
h) $\overrightarrow{JN} \cdot \overrightarrow{RS}$.
i) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 2. C

Soient A, B et C des points de l'espace tels que : $AB = 7$, $AC = 8$, $BC = 5$.

1. À l'aide d'une formule de polarisation démontrez que

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(BC^2 - AB^2 - AC^2\right).$$

2. Déduisez-en les valeurs du produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
3. Déterminez une valeur approchée à $0,01^\circ$ près de l'angle $\widehat{BAC}$ en degrés.

Exercice 3. C

Soient A, B et C des points de l'espace tels que : $AB = 6$, $AC = 5$, $BC = 8$.

1. À l'aide d'une formule de polarisation déterminez le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.
2. Déduisez-en $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
3. Déterminez une valeur approchée à $0,01^\circ$ près de l'angle $\widehat{ABC}$ en degrés.

Exercice 4. C

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace tels que $ABCD$ est un parallélogramme.

1. À l'aide d'une formule de polarisation démontrez que

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}(BD^2 - AC^2).$$

2. Démontrer alors la propriété suivante : « Un parallélogramme est un rectangle si et seulement si ses diagonales sont de même longueur. »

Exercice 5. C

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace tels que $ABCD$ est un parallélogramme. On suppose que $AC = 10$ et $BD = 4$.

À l'aide d'une formule de polarisation calculez le produit scalaire $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Exercice 6. D