Loi binomiale, problèmes de seuil.

I Échantillon.

Un résultat d'un schéma de Bernoulli est appelé *un échantillon*. La *taille de l'échantillon* est le paramètre n du schéma, c'est-à-dire le nombre de répétition de l'épreuve de Bernoulli.

II Taille minimale de l'échantillon.

Considérons la situation suivante : je lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir un pile. Intuitivement nous devinons qu'il y a de fortes chances que cela se produise avant 10 lancers et fort peu de chance que cela arrive après 10 000 lancers.

Une façon de quantifier cela consiste à répondre par exemple à la question : quel est le plus petit nombre de lancers nécessaire pour avoir 90 % de chance d'obtenir au moins un pile.

Modélisons : soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de piles obtenu lors de $n \in \mathbb{N}^*$ lancers.

Évidemment $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. Et nous cherchons le plus petit n tel que $\mathbb{P}(X \geqslant 1) \geqslant 0,9$.

Dans certains cas il est possible de résoudre algébriquement cette inéquation dont l'inconnue (qui n'apparaît pas dans la précédente écriture de l'inéquation) est n : $1 - \frac{1}{2^n} \geqslant 0,9$. Nous verrons plus tard qu'en utilisant la fonction logarithme népérien il est possible de résoudre ce type d'inéquation mais pour l'instant nous nous contenterons d'une résolution à la calculatrice en entrant la fonction `1-binomFRep(X,0.5,0)` et en regardant son tableau de valeurs.

Il faut au moins 4 lancers pour avoir (plus de) 90 % de chance d'obtenir un pile.

III Intervalle de fluctuation.

Dans un article, un journaliste affirme que 42 % des jeunes qui aiment la lecture préfèrent lire le soir.

Nous souhaiterions vérifier si cette assertion est vraie ou fausse.

Pour cela on décide d'interroger au hasard 20 jeunes qui aiment lire. Le sondage est assimilé à une succession de tirages avec remise et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de jeunes qui aiment lire le soir.

Si le pourcentage donné par le journaliste est vrai, nous devrions avoir $X \hookrightarrow \mathscr{B}(20; 0,42)$.

Lorsqu'on effectue réellement le sondage 7 personnes disent aimer lire le soir. Peut-on dire que le journaliste se trompe ou pas ?

1 Trouver le plus petit $b \in [\![0, n]\!]$ tel que $\mathbb{P}(X \leqslant b) \geqslant \mu$.

Le principe est le même qu'auparavant, nous allons utiliser la fonction de répartition, $x \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant x)$, déjà programmée dans votre calculatrice.

Si $\mu = 0,975$ alors pour le sondage nous aurons donc $\mathbb{P}(X \leqslant b) \leqslant 0,975$. Avec la calculatrice on obtient : $b = 12$.

Si $\mu = 0,025$ alors pour le sondage nous aurons donc $\mathbb{P}(X \leqslant a) > 0,025$. Avec la calculatrice on obtient : $a = 4$.

2 Trouver un intervalle $[a, b]$ tel que $\mathbb{P}(X \in [a, b]) \geqslant \alpha$.

$\mathbb{P}(X \leqslant 4) > 0,025$ donc

$$\mathbb{P}(X \leqslant 3) \leqslant 0,025$$

et enfin

$$-\mathbb{P}(X \leqslant 3) \geqslant -0,025.$$

En sommant avec $\mathbb{P}(X \leqslant 12) \geqslant 0,975$ on obtient :

$$\mathbb{P}(X \leqslant 12) - \mathbb{P}(X \leqslant 3) \geqslant 0,975 - 0,025.$$

Autrement dit

$$\mathbb{P}(4 \leqslant X \leqslant 12) \geqslant 0,95.$$

Ce qui s'interprète en disant que la probabilité qu'entre 4 et 12 personnes répondent aimer lire le soir est supérieure à 95 %.

Si 13 personnes avaient répondu nous aurions pu mettre en doute l'affirmation du journaliste.

IV Exercices.

Exercice 1. C

Dans un chaîne de production pharmaceutique, la proportion de gélules non commercialisables en sortie de chaîne est 3 %.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 200 gélules, associe le nombre de gélules non commercialisables.

a) Quelle est la loi suivie par X ?

b) Déterminez le plus petit entier b tel que $\mathbb{P}(X \in [0, b]) \geqslant 0,9$.

c) Interprétez ce résultat.

Exercice 2. C

On lance 100 fois un dé tétraédrique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On note Y la variable aléatoire qui indique le nombre de 1 obtenus.

a) Quelle loi suit Y ?

b) Déterminez les entiers a et b tels que a est le plus petit entier tel que $\mathbb{P}(Y \leqslant a) > 0,025$ et b le plus petit entier b tel que $\mathbb{P}(Y \leqslant b) \geqslant 0,975$.

c) Déduisez-en un intervalle I tel que $\mathbb{P}(Y \in I) \geqslant 0,95$. Interprétez ce résultat.

Exercice 3. C

Une publicité affirme que 80 % des personnes utilisant un certain produit ont des cheveux qui repoussent au cours du premier mois d'utilisation.
Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95 % (même intervalle qu'à l'exercice précédent) de la fréquence des utilisateurs dont les cheveux ont repoussé au cours du premier mois, pour un échantillon de taille 50.

Exercice 4. C

Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord.
Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.
Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

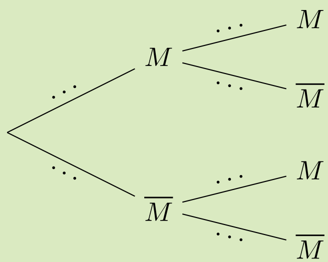
Partie A

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose.
On considère les évènements suivants :

- M : « le coyote est malade » ;
- T : « le test du coyote est positif ».

On note $\overline{M}$ et $\overline{T}$ respectivement les évènements contraires de M et T.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.
3. Démontrer que la probabilité de T est égale à $0,694$.
4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.

   Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.
5. (a) Par analogie avec la question précédente, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et calculer cette valeur en arrondissant au millième.

   (b) Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, et interpréter.

Exercice 4. - Suite.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif est de $0,694$.

1. Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.
   (b) Calculer la probabilité que dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.
   (c) Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.
2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à $0,99$?

Exercice 5. C

Au cours d'une soirée, un restaurant accueille 45 convives.
Pour un convive quelconque il est établi par le restaurateur que la probabilité qu'il prenne un café à la fin du repas est exactement de $0,8$.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de cafés effectivement commandés à l'issue de la soirée. X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(45; 0,8)$.

1. (a) Afficher informatiquement les valeurs de k et les probabilités correspondantes $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in [\![0; 45]\!]$.
   (b) Donnez les valeurs de k pour lesquelles $\mathbb{P}(X = k) \geqslant 0,1$.
2. Toujours à l'aide de la machine, affichez les probabilités cumulées croissantes $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ pour $k \in [\![0; 45]\!]$.
3. (a) Déterminez le plus petit nombre entier a tel que $\mathbb{P}(X \leqslant a) \geqslant 0,9$.
   Interprétez ce résultat dans le contexte.
   (b) Déterminez le plus grand nombre entier b tel que $\mathbb{P}(X \leqslant b) \leqslant 0,1$.
   (c) Déterminez un ensemble $[\![c, d]\!]$ d'amplitude minimale tel que $\mathbb{P}(c \leqslant X \leqslant d) \geqslant 0,95$.

Exercice 6. C

Un site internet pose à tout usager une question de satisfaction à l'issue de sa visite ?
La probabilité qu'un usager réponde « non » à cette question est $0,17$.
Un échantillon de 100 réponses prises au hasard a été constitué.
On note X le nombre de réponses « non » contenues dans cet échantillon.

1. (a) Quelle est la loi suivie par la variable X ?
   (b) Avec la calculatrice, déterminez les valeurs de k pour lesquelles on a $\mathbb{P}(X = k) \geqslant 0,05$.
2. (a) À partir de quelle valeur de k a-t-on $\mathbb{P}(X \leqslant k) \geqslant 0,9$?
   Donnez une interprétation de ce résultat.
   (b) Déterminez un ensemble $[\![k, k']\!]$ d'amplitude minimale tel que $\mathbb{P}(k \leqslant X \leqslant k') \geqslant 0,5$.

Exercice 7. C

Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets.
Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories :

- 69 % des déchets sont minéraux et non dangereux ;
- 28 % des déchets sont non minéraux et non dangereux ;
- les déchets restants sont des déchets dangereux.

Cette enquête statistique nous apprend également que :

- 73 % des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables ;
- 49 % des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables ;
- 35 % des déchets dangereux sont recyclables.

Les parties A *et* B *sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.*

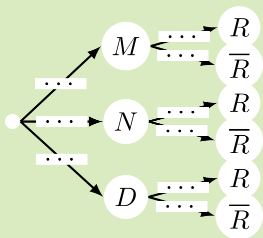
Partie A

Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet. On considère les évènements suivants :

- M : « Le déchet prélevé est minéral et non dangereux » ;
- N : « Le déchet prélevé est non minéral et non dangereux » ;
- D : « Le déchet prélevé est dangereux » ;
- R : « Le déchet prélevé est recyclable ».

On note $\overline{R}$ l'évènement contraire de l'évènement R.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation de l'énoncé.



2. Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à 0,010 5.
3. Déterminer la probabilité $P\left(M \cap \overline{R}\right)$ et interpréter la réponse obtenue dans le contexte de l'exercice.
4. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est $P(R) = 0{,}651\,4$.
5. On suppose que le déchet prélevé est recyclable. Déterminer la probabilité que ce déchet soit non minéral et non dangereux. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

Exercice 7. - Suite.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à 0,651 4.

1. Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise.

   On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.

   (a) On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

   (b) Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif.

   (a) Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable.

   (b) Déterminer la valeur de l'entier naturel n à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,999 9.

Exercice 8. BAC

- La Réunion sujet 1 28 mars 2023.
- La Réunion sujet 2 29 mars 2023.
- Métropole, Antilles-Guyane sujet 2 12 septembre 2023.