

17 Bases et repères de l'espace.

I Vecteurs libres, vecteurs linéairement indépendants.

II Bases.

III Coordonnées.

IV Exercices.

Exercice 1. B

On considère un pavé droit $ABCDEFGH$.

Dites si les 3-listes proposées sont des bases de l'espace.

- | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $(\vec{AL}, \vec{CJ}, \vec{BS})$. | b) $(\vec{KD}, \vec{BC}, \vec{BF})$. | c) $(\vec{DI}, \vec{DC}, \vec{PF})$. |
| d) $(\vec{RI}, \vec{RM}, \vec{RS})$. | e) $(\vec{DL}, \vec{DB}, \vec{DH})$. | f) $(\vec{KG}, \vec{KT}, \vec{KU})$. |
| g) $(\vec{FI}, \vec{FM}, \vec{FH})$. | h) $(\vec{BA}, \vec{BD}, \vec{NL})$. | i) $(\vec{AE}, \vec{FS}, \vec{GC})$. |

Exercice 2. B

Donnez 5 bases distinctes du parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.

Exercice 3. B

On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Les autres points sont les milieux des arêtes.

Donnez à chaque fois les coordonnées du vecteur dans la base proposée.

- | | |
|---|---|
| a) \vec{AG} et $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$. | b) \vec{DB} et $(\vec{HD}, \vec{HE}, \vec{HG})$. |
| c) \vec{DH} et $(\vec{BA}, \vec{BD}, \vec{BF})$. | d) \vec{AN} et $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$. |
| e) \vec{QM} et $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$. | f) \vec{PJ} et $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$. |

Exercice 4. C

Dites si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires ou pas dans les cas suivants.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -8 \\ -16 \\ -57 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{u} \begin{pmatrix} \pi \\ 1 \\ \sqrt{\pi} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \sqrt{\pi^3} \\ \sqrt{\pi} \\ \pi \end{pmatrix}$.

d) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. C

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace relativement à une base \mathcal{B} .

Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} constituent-ils une base de l'espace ?

Exercice 6. C

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace relativement à une base \mathcal{B} .

Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} constituent-ils une base de l'espace ?

Exercice 7. C

Soient $A(3, -2, -4)$, $B(4, -3, -2)$, $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Déterminez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$.
- Les vecteurs \overrightarrow{AB} , \vec{u} et \vec{v} sont-ils liés ?

Correction de l'exercice 7

1. $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$M(4, -3, -2)$.

$$2. \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$, il existe donc une combinaison linéaire à coefficients non tous nuls qui égale le vecteur nul, donc la famille est liée.

Exercice 8. C

Soient $A(1, 2, 3)$, $B(2, 0, 3)$, et $C(6, 3, 8)$ des points de l'espace rapporté à un repère, $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace.

1. Démontrez que les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont linéairement indépendants.
2. Déterminez α , β et γ tels que :

$$\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}.$$

3. Déterminez α' , β' et γ' tels que :

$$\overrightarrow{BC} = \alpha'\vec{u} + \beta'\vec{v} + \gamma'\vec{w}.$$

4. Déduisez-en les coordonnées du point C dans le repère $(A; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exercice 9. C

On considère les points $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 1, 4)$ et $C(3, 5, -2)$ dans un repère (O, I, J, K) .

Déterminez les coordonnées du point D telles que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Correction de l'exercice 9

$$x_C - x_D = x_B - x_A \Leftrightarrow 3 - x_D = -1 - 1 \Leftrightarrow x_D = 5.$$

$$y_C - y_D = y_B - y_A \Leftrightarrow 5 - y_D = 1 - 2 \Leftrightarrow y_D = 6.$$

$$z_C - z_D = z_B - z_A \Leftrightarrow -2 - z_D = 4 - 3 \Leftrightarrow z_D = -3.$$

$$D(5, 6, -3).$$

Exercice 10. C

On considère les points $A(1, 2, 1)$, $B(3, -1, 2)$ et $C(-1, 3, 4)$ dans un repère (O, I, J, K) .

1. Déterminez les coordonnées du milieu de $[AC]$.
2. Déterminez les coordonnées de D telles que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Correction de l'exercice 10

$$x_C - x_D = x_B - x_A \Leftrightarrow -1 - x_D = 3 - 1 \Leftrightarrow x_D = -3.$$

$$y_C - y_D = y_B - y_A \Leftrightarrow 3 - y_D = -1 - 2 \Leftrightarrow y_D = 6.$$

$$z_C - z_D = z_B - z_A \Leftrightarrow 4 - z_D = 2 - 1 \Leftrightarrow z_D = 3.$$

$$D(-3, 6, 3).$$

Exercice 11. C

Soient les points $A(-1, 4, -3)$ et $B(2, 1, 3)$ dans un repère (O, I, J, K) .

Déterminez les coordonnées du point M vérifiant $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Correction de l'exercice 11

$$x_A - x_M + x_B - x_A = \frac{1}{3}(x_B - x_A) \Leftrightarrow -1 - x_M + 1 - x_M = \frac{1}{3}(2 - (-3))$$

Exercice 12. C

On considère les points $A(0, 1, 1)$, $B(2, 1, 1)$, $C(3, 1, 1)$ et $D(1, 1, 1)$ dans un repère (O, I, J, K) .

1. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Soit $E(2, 2, 4)$.

Déterminez les coordonnées du point F telles que $ACEF$ soit un parallélogramme.

3. Soient J le milieu de $[EF]$ et I le point tel que F soit le milieu de $[AI]$.
Démontrez que J est le milieu de $[IC]$.

Exercice 13. D

Soient $A(1, 2, 1)$, $B(1, -1, 1)$ et $C(3, 1, 2)$ trois points de l'espace rapporté à un repère. On note I le milieu de $[BC]$.

1. Déterminez les coordonnées du point G (centre de gravité du triangle ABC) défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
2. On considère le point $E(3, 7, 2)$. Déterminez les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.
3. On note J le milieu de $[BE]$. Les points G , J et F sont-ils alignés ?

Exercice 14. D

Soient $A(2, 4, -1)$, $B(3, 1, 2)$, $C(1, 0, 1)$, $D(3, 2, 1)$ et $E(1, 2, 0)$.

1. Démontrez que les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AD} ne sont pas liés.
2. Le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ peut-il être un repère de l'espace ?
3. Déterminez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Où se situe le point M ?
4. Déterminez α , β , γ tels que :

$$\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD}.$$

Quelles sont les coordonnées de E dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$?