17 Bases et repères de l'espace.

I Vecteurs libres, vecteurs linéairement indépendants.

Pour définir une base du plan nous avions besoin de vecteur non-colinéaires. Nous allons définir une notion plus générale pour trois vecteurs (ou plus).

Définition 1

Nous dirons que des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont *linéairement indépendants* (ou forment une famille libre) si la seule combinaison linéaire de ces trois vecteurs qui soit égale au vecteur nul est celle dont tous le coefficients sont nuls.
Autrement dit :

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R},\ \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Si une famille de trois vecteurs n'est pas libre nous dirons qu'elle est liée.

Si trois vecteurs de l'espace ne sont pas linéairement indépendants nous dirons qu'ils sont *coplanaires*.

Exemples.

1. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}$ et $\vec{u}$ ne sont pas linéairement indépendants puisque, par exemple : $2 \cdot \vec{u} - 1 \cdot \vec{u} - 1 \cdot \vec{u} = \vec{0}$.
2. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w} = -\vec{u} - \vec{v}$ ne sont pas linéairement indépendants car : $1 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v} + 1 \cdot \vec{w} = \vec{0}$.
3. Si $ABCDEFGH$ est un cube non réduit à un point alors (et nous l'admettrons pour l'instant) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont des vecteurs linéairement indépendants.

II Bases.

Définition 2

Soient :

. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de l'espace $\mathscr{E}_3$.

Nous dirons que le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une *base* de $\mathscr{E}_3$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.

Exemples.

1. Pour un cube $ABCDEFGH$ non réduit à un point $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ est une base de $\mathscr{E}_3$.

III Coordonnées.

Théorème 1 et définition.

Soient :
. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathscr{E}_3$,
. $\vec{u}$ un vecteur de $\mathscr{E}_3$.

Il existe un unique triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}.$$

Nous dirons que (x, y, z) sont *les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$*.

Remarques.

1. Autrement dit pour trouver les coordonnées d'un vecteur il suffit de l'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de la base.

Corollaire 1 - Norme et coordonnées.

Soient :
. $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace,
. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace.

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Proposition 1 - coordonnées affines et vectorielles.

Soient :

. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathscr{E}_3$,

. I, J et K les images respective de O dans les translations de vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$,

. A un point de coordonnées (x_A, y_A, z_A) dans (O, I, J, K),

. B un point de coordonnées (x_B, y_B, z_B) dans (O, I, J, K).

Les coordonnées du représentant $\overrightarrow{AB}$ sont données par

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Proposition 2

Soient :

. $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace $\mathscr{E}_3$,

. $\lambda \in \mathbb{R}$,

. $\vec{u}(x, y, z)$ un vecteur de $\mathscr{E}_3$ dont les coordonnées sont données dans la base $\mathscr{B}$,

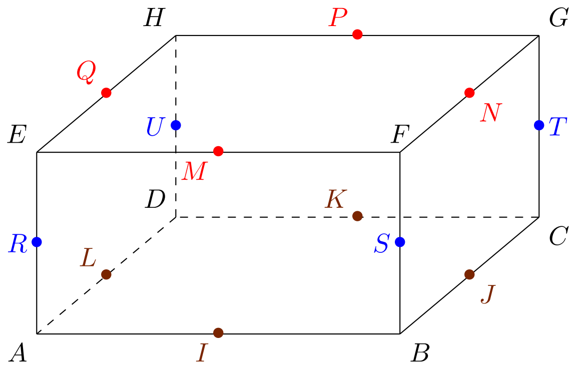
. $\vec{v}(r, s, t)$ un vecteur de $\mathscr{E}_3$ dont les coordonnées sont données dans la base $\mathscr{B}$.

On a :

$$\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + r \\ y + s \\ z + t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot \vec{u}\begin{pmatrix} \lambda \times x \\ \lambda \times y \\ \lambda \times z \end{pmatrix}.$$

IV Exercices.

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. Les autres points sont les milieux des arêtes.



Exercice 1. B

On considère une pavé droit $ABCDEFGH$.
Dites si les 3-listes proposées sont des bases de l'espace.

a) $\left(\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{BS}\right)$. b) $\left(\overrightarrow{KD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF}\right)$. c) $\left(\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PF}\right)$.

d) $\left(\overrightarrow{RI}, \overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RS}\right)$. e) $\left(\overrightarrow{DL}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DH}\right)$. f) $\left(\overrightarrow{KG}, \overrightarrow{KT}, \overrightarrow{KU}\right)$.

g) $\left(\overrightarrow{FI}, \overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FH}\right)$. h) $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{NL}\right)$. i) $\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{FS}, \overrightarrow{GC}\right)$.

Exercice 2. B

Donnez 5 bases distinctes du parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.

Exercice 3. B

On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Les autres points sont les milieux des arêtes.
Donnez à chaque fois les coordonnées du vecteur dans la base proposée.

a) $\overrightarrow{AG}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. b) $\overrightarrow{DB}$ et $\left(\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HG}\right)$.

c) $\overrightarrow{DH}$ et $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BF}\right)$. d) $\overrightarrow{AN}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

e) $\overrightarrow{QM}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. f) $\overrightarrow{PJ}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Exercice 4. C

Dites si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou pas dans les cas suivants.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\-16\\-57\end{pmatrix}$.

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\pi\\1\\\sqrt{\pi}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{\pi^3}\\\sqrt{\pi}\\\pi\end{pmatrix}$.

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 5. C

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace relativement à une base $\mathscr{B}$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ constituent-ils une base de l'espace ?

Exercice 6. C

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace relativement à une base $\mathscr{B}$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ constituent-ils une base de l'espace ?

Exercice 7. C

Soient $A(3,-2,-4)$, $B(4,-3,-2)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$.

1. Déterminez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils liés ?

Exercice 8. C

Soient $A(1,2,3)$, $B(2,0,3)$, et $C(6,3,8)$ des points de l'espace rapporté à un repère, $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace.

1. Démontrez que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.
2. Déterminez α, β et γ tels que :

$$\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}.$$

3. Déterminez α', β' et γ' tels que :

$$\overrightarrow{BC} = \alpha'\vec{u} + \beta'\vec{v} + \gamma'\vec{w}.$$

4. Déduisez-en les coordonnées du point C dans le repère $(A;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Exercice 9. C

On considère les points $A(1,2,3)$, $B(-1,1,4)$ et $C(3,5,-2)$ dans un repère (O,I,J,K).
Déterminez les coordonnées du point D telles que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 10. C

On considère les points $A(1,2,1)$, $B(3,-1,2)$ et $C(-1,3,4)$ dans un repère (O,I,J,K).

1. Déterminez les coordonnées du milieu de $[AC]$.
2. Déterminez les coordonnées de D telles que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 11. C

Soient les points $A(-1,4,-3)$ et $B(2,1,3)$ dans un repère (O,I,J,K).
Déterminez les coordonnées du point M vérifiant $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 12. C

On considère les points $A(0,1,1)$, $B(2,1,1)$, $C(3,1,1)$ et $D(1,1,1)$ dans un repère (O,I,J,K).

1. Démontrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Soit $E(2,2,4)$.
   Déterminez les coordonnées du point F telles que $ACEF$ soit un parallélogramme.
3. Soient J le milieu de $[EF]$ et I le point tel que F soit le milieu de $[AI]$.
   Démontrez que J est le milieu de $[IC]$.

Exercice 13. D

Soient $A(1,2,1)$, $B(1,-1,1)$ et $C(3,1,2)$ trois points de l'espace rapporté à un repère. On note I le milieu de $[BC]$.

1. Déterminez les coordonnées du point G (centre de gravité du triangle ABC) défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
2. On considère le point $E(3,7,2)$. Déterminez les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.
3. On note J le milieu de $[BE]$. Les points G, J et F sont-ils alignés ?

Exercice 14. D

Soient $A(2,4,-1)$, $B(3,1,2)$, $C(1,0,1)$, $D(3,2,1)$ et $E(1,2,0)$.

1. Démontrez que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas liés.
2. Le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ peut-il être un repère de l'espace ?
3. Déterminez les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Où se situe le point M ?
4. Déterminez α, β, γ tels que :
   $$\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD}.$$
   Quelles sont les coordonnées de E dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$?