# 16 Loi binomiale.

## I Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli.

### 1 Loi de Bernoulli.

Les résultats obtenus sont les lettres $S$ (succès) et $E$ (échec) ce qui n'est pas le plus pratique pour modéliser mathématiquement. C'est pourquoi nous allons associer une variable aléatoire aux épreuves de Bernoulli.

Définition 1

Nous dirons qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ suit une *loi de Bernoulli de paramètre $p$*, si $X$ compte le nombre de succès lors d'une épreuve de Bernoulli de paramètres $p$.

Remarques.

1. Si $X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$ nous avons donc :

| $x$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x)$ | $1 - p$ | $p$ |

### 2 Moments d'une loi de Bernoulli.

Proposition 1

Soient :

. $p \in [0; 1]$,

. $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p$.

(i) $\mathbb{E}(X) = p$.

(ii) $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$.

(iii) $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$.

## II Schéma de Bernoulli, loi binomiale.

## 1 Variable aléatoire suivant une loi binomiale.

**Définition 2**

Nous dirons qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ suit une *loi binomiale de paramètres $n$ et $p$*, et nous noterons $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, si $X$ compte le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n$ et $p$.

**Remarques.**

1. Par définition $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ (en utilisant d'autres notations : $X \in \{0; 1; \dots; n\}$).
2. En particulier si $X$ suit une loi binomiale de paramètre $p \in [0;1]$ alors $X \hookrightarrow \mathbb{B}(1,p)$.

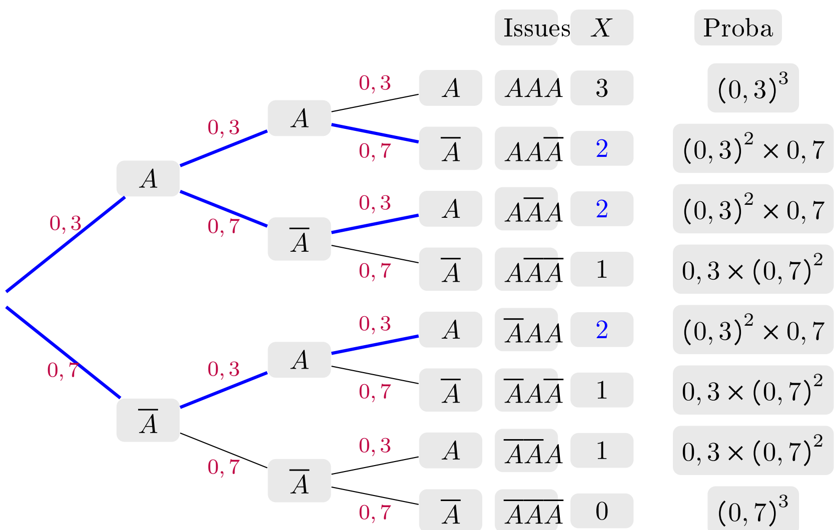
**Exemples.**

1. L'exemple typique est celui de la variable aléatoire $X$ qui compte le nombre de piles obtenus lors de la répétition de plusieurs piles ou face. Ainsi si on lance 10 fois la pièce et que celle-ci est parfaitement équilibrée alors $X \hookrightarrow \mathbb{B}\left(10; \frac{1}{2}\right)$.

## 2 Calcul de probabilité pour une loi binomiale.

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,3$.

La situation peut donc être représentée par l'arbre



Nous souhaitons calculer la probabilité d'obtenir 2 succès. Autrement dit nous cherchons $P(X = 2)$.

- La probabilité d'un chemin comportant 2 succès est $0,3 \times 0,3 \times 0,7 = 0,3^2 \times 0,7$
- Il y a $\binom{3}{2} = 3$ chemins sur l'arbre comportant (exactement) 2 succès.

Nous en déduisons $P(X = 2) = 3 \times 0,3^2 \times 0,7 = 0,189$.

Proposition 2

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $k \in [\![0, n]\!]$,

. $p \in [0; 1]$,

. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

## 3 Calcul de probabilité ou de fonction de répartition avec la calculatrice.

Supposons par exemple que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(12; 0,2)$.

Pour calculer $P(X = 3)$ on peut utiliser la fonction $binomFdp(n, p, k)$. Autrement dit :
$\boxed{\text{2nde}}$, $\boxed{\text{var}}$ (distrib), onglet (DISTRIB), choix $A$ : $binomFdp$.

Pour calculer $P(X \leq 3)$ on peut utiliser la fonction $binomFRp(n, p, k)$. Autrement dit :
$\boxed{\text{2nde}}$, $\boxed{\text{var}}$ (distrib), onglet (DISTRIB), choix $B$ : $binomFRp$.

## 4 Moments d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Proposition 3

Soit $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

(i) $\mathbb{E}(Y) = np$.

(ii) $\mathbb{V}(Y) = np(1-p)$.

(iii) $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)}$.

# III Exercices.

**Exercice 1.** C

Une entreprise fabrique des assiettes. On sait que 6 % des assiettes produites présentent un défaut. On choisit une assiette au hasard. Soit $X$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'assiette ne présente pas de défaut et 0 sinon.

1. Quelle loi suit $X$ ?
2. Donnez le paramètre de cette loi.
3. Calculez $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\sigma(X)$.

**Exercice 2.** A

Dans un stock de ballons de foot contenant 70 % de ballons bicolores, on prélève 12 ballons au hasard, successivement et avec remise.
$X$ donne le nombre de ballons bicolores obtenus.
Justifiez que $X$ suit une loi binomiale.

**Exercice 3.** A

Dites si la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale. Si oui précisez-en les paramètres.

1. Dans un supermarché, 20 % des clients du samedi ont un caddie inférieur à 100 €.

   On choisit au hasard 15 clients un samedi. $X$ donne le nombre de clients dont le caddie est inférieur à 100 €.
2. On lance cinq fois de suite une pièce bien équilibrée. $X$ donne le rang du $1^{\text{er}}$ pile obtenu ($X$ prend la valeur 6 si on a pas obtenu de pile sur les 5 lancers).

**Exercice 4.** C

Soit $X$ une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,1$.
Donnez une valeur approchée de $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(X = 3)$ et $\mathbb{P}(X = 4)$.

**Exercice 5.** C

Soit $X$ une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{3}{4}$.

1. Donnez une valeur approchée de $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = 2)$.
2. Déduisez-en $\mathbb{P}(X \geqslant 3)$.

**Exercice 6.** C

D'après l'INSEE, la proportion de Français de moins de 20 ans est restée stable à 24, 6 % entre 2012 et 2014. On suppose que cette proportion se maintient pendant quelques années.
On interroge au hasard 12 Français et on note $X$ la variable aléatoire donnant le nombre d'entre eux qui sont âgés de moins de 20 ans.

1. Justifiez que $X$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculez les probabilités des événements suivants.
   (a) 10 personnes interrogées ont moins de 20 ans.
   (b) Au plus 8 personnes interrogées ont moins de 20 ans.
   (c) Au moins 4 personnes interrogées ont moins de 20 ans.
3. Quel est le nombre le plus probable de personnes ayant moins de 20 ans ?

### Exercice 7. C

18 % des Français âgés de plus de 15 ans ont fréquentés au moins une fois une bibliothèque en 2008.
On suppose que cette proportion se maintient pendant les années qui suivent et on interroge au hasard 30 Français âgés de plus de 15 ans. On note $X$ la variable aléatoire donnant le nombre d'entre eux qui ont fréquenté une bibliothèque dans l'année.

1. Justifiez que $X$ suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.
2. Calculez la probabilité des événements suivants :

   a) $\mathbb{P}(X = 10)$, b) $\mathbb{P}(X \leqslant 5)$, c) $\mathbb{P}(X > 8)$.

   Traduisez chaque résultat par une phrase dans le contexte de l'exercice.
3. Quel est le nombre le plus probable de personnes ayant fréquenté une bibliothèque dans l'année ?

### Exercice 8. B

Un fumeur est dit « fumeur régulier » s'il fume au moins une cigarette par jour.
En 2010, en France, la proportion de fumeurs réguliers âgés de 15 à 19 ans, était de $23,6$ %.
On choisit au hasard, et de manière indépendante, quinze jeunes âgés de 15 à 19 ans.
Soit $X$ la variable aléatoire donnant le nombre de fumeurs réguliers parmi ces quinze jeunes.

1. Précisez la loi de probabilité de $X$.
2. Déterminez les probabilités des événements suivants, en arrondissant à $0,001$ près.

   (a) Deux des jeunes interrogés sont des fumeurs réguliers.
   (b) Aucun des jeunes interrogés n'est un fumeur régulier.
   (c) Moins de cinq jeunes interrogés sont des fumeurs réguliers.
   (d) Plus d'un jeune interrogé est un fumeur régulier.

### Exercice 9. C

Un fabricant vend des stylos par lot de 10. Soit $X$ la variable aléatoire correspondant au nombre de stylos défectueux dans un lot. On admet que $X$ suit une loi binomiale de paramètres 10 et $0,034$.
On donnera les résultats à $10^{-3}$ près.

1. Quelle est la probabilité que le lot contienne au moins un stylo défectueux ?
2. Quelle est la probabilité que le lot contienne au moins deux stylos défectueux ?

### Exercice 10. C

On lance simultanément deux dés à six faces parfaitement équilibrés.

1. Quelle est la probabilité de faire un double 6 ?
2. On lance 10 fois de suite cette paire de dés.
   Quelle est la probabilité de faire au moins trois double 6 lors de ces 10 parties ? On donnera le résultat arrondi à $10^{-4}$ près.

### Exercice 11. C

Une association organise une tombola et vend un très grand nombre de tickets à gratter ? On suppose que deux tickets sur dix sont gagnants.
Une personne achète au hasard vingt tickets.
On note $X$ la variable aléatoire donnant le nombre de tickets gagnants.

1. Donnez la loi de probabilité de $X$.
2. Sans justification donnez la valeur de $k$ telle que $\mathbb{P}(X = k)$ soit maximale. Interprétez ce résultat.
3. Calculez l'espérance de $X$. Interprétez.

### Exercice 12. B

Un basketteur s'entraîne à tirer des lancers francs. On suppose que, quel que soit le résultat des tirs précédents, la probabilité qu'il réussisse est égale à $0,8$. Il effectue une série de 30 tirs. On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de fois où il réussit son tir.

1. Déterminez la loi de probabilité de $X$.
2. Calculez la probabilité que le basketteur
   (a) réussisse 18 tir exactement,
   (b) réussisse moins de 15 tirs,
   (c) réussisse au moins 20 tirs.
3. Déterminez le nombre moyen de tirs réussis.

**Exercice 13.** D

On joue à pile ou face cinq fois de suite. Soit $X$ la variable aléatoire représentant le nombre de fois où on a obtenu face.

1. Quelle loi suit $X$ ? Donnez ses paramètres.

Pour jouer à ce jeu, il faut payer 3 €. On gagne 1 € à chaque fois qu'on obtient face lors d'un des cinq lancers.
On note $Y$ la variable aléatoire représentant le gain (ou la perte) totale lors de ce jeu.

2. Exprimez $Y$ en fonction de $X$.
3. Déduisez-en $\mathbb{E}(Y)$.
4. Ce jeu est-il financièrement intéressant ?
5. Quelle somme aurait-il fallu payer au départ pour que le jeu soit équitable ?

**Exercice 14.** D

Un tireur à l'arc atteint sa cible neuf fois sur dix. Ce tireur participe à un concours primé.
Il tire 5 flèches sur la cible. Pour chaque flèche, s'il atteint la cible, il gagne 10 € , sinon il perd 20 €. On suppose que les tirs sont indépendants.

1. On appelle $X$ le nombre de flèches ayant atteint la cible à l'issue des cinq tirs.
   (a) Montrer que $X$ suit une loi binomiale dont précisera les paramètres.
   (b) Déterminez la probabilité d'atteindre au moins 2 fois la cible.
2. On appelle $Y$ la variable aléatoire égale au gain du joueur à l'issue des cinq tirs.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par $Y$ ?
   (b) Déterminez la loi de $Y$.
   (c) Quel est le gain moyen (positif ou négatif) du tireur s'il participe un grand nombre de fois à ce concours ? Est-ce intéressant pour lui ?

**Exercice 15.** BAC

— Centres étrangers groupe I sujet 1 13 mars 2023. Arbre, suite, binomiale.
— Polynésie sujet 2 14 mars 2023. Arbre, suite, binomiale.