Suites, opérations sur les limites.

I Devinez.

Des exemples mettant en évidence les formes indéterminées et les situation plus simples.

Exemple : $\frac{1}{n} \times n$.

Conjecturez les limites des suites dont les termes généraux sont : n^3+n^2, $\frac{1}{1+0{,}5^n}$, $-n^7+n^2$, $\frac{n^3+n^2}{n^4+n}$, $\frac{n^3}{0{,}5^n}$.

La définition de la convergence permet d'établir la convergence de quelques suites de référence. Pour le reste nous ferons, ce que nous avions déjà fait pour les fonctions dérivées, à savoir obtenir de nouveaux résultat en combinant ceux déjà connus.

II Somme.

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on s'intéresse à la convergence de la suite somme $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de celles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

v_n \ u_n	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
m	$m+\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Les situations avec des "?" sont appelées des formes indéterminées. Nous ne pouvons pas déterminer si il y a ou non une limite. Il faudra faire des études plus approfondies.

Exemples.

1. 3 est une suite constante (donc qui converge vers 3) et $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0 donc $\left(3+\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 3.
2. $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0 et $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$ donc $\left(\frac{1}{n}+\sqrt{n}\right)$ tend vers $+\infty$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+\sqrt{n} = +\infty$.

III Produit.

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on s'intéresse à la convergence de la suite produit $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de celles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

v_n \ u_n	$\ell > 0$	$\ell = 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$m > 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$m = 0$	0	0	0	?	?
$m < 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exemples.

1. -2 est une suite constante (donc qui converge vers -2 et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui diverge vers $+\infty$ donc $(-2 \times n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -1 \times n^2 = -\infty$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\sqrt{n} = +\infty$.

IV Inverse.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont les termes sont tous non nuls.

u_n	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\dfrac{1}{u_n}$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$

Exemples.

1. Nous pouvons, sachant que $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, retrouver que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2+n} = 0$.
3. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n} > 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n}} = +\infty$.

V Quotient.

Les résultats concernant les suites obtenues comme quotient de deux autres suites découlent des résultats sur les produits et les inverses.

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on s'intéresse à la convergence de la suite produit $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de celles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

u_n \ v_n	$\ell > 0$	$\ell = 0^+$	$\ell = 0^-$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$m > 0$	$\frac{m}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{m}{\ell}$	0	0
$m = 0$	0	?	?	0	0	0
$m < 0$	$\frac{m}{\ell}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{m}{\ell}$	0	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	?
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	?

VI Lever l'indétermination.

Les règles sur les opérations se confrontent souvent à des situations de limite indéterminée.

Pour cette année, le plus efficace est très souvent de factoriser par la plus grande puissance de n apparaissant dans l'expression du terme général de la suite.

Exemples.

1. Si $u_n = n^3 - n$ alors *a priori* c'est une forme indéterminée. Factorisons par n^3 : $u_n = n^3\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. Avec cette expression il n'y a plus de forme indéterminée : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. $u_n = \frac{2n+1}{3n+7}$ correspond à une forme indéterminée, mais, en factorisant par n au numérateur et au dénominateur : $u_n = \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{7}{n}}$.

   Or $\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{1}{n} = 2$ et $\lim_{n\to+\infty} 3+\frac{7}{n} = 3$ donc (u_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$.
3. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ est une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination dans cette expression radicale on utilise les expressions conjuguées. $u_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$.

VII Exercices.

Exercice 1. B

Déterminez les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n^2 + n + \dfrac{1}{n}$.

b) $u_n = \sqrt{n}\left(n^2 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

c) $u_n = \dfrac{4}{\sqrt{n} + n}$.

d) $u_n = n^3 + n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

e) $u_n = 5n^2 + 3n\sqrt{n}$.

f) $u_n = \sqrt{n}(2 - n - 2n^2)$.

g) $u_n = \dfrac{1}{n^2 + n - 1}$.

h) $u_n = n^2\left(\dfrac{2}{n+1} - 1\right)$.

i) $u_n = \dfrac{3}{n}\left(\dfrac{3}{n^3} - 5\right)$.

j) $u_n = \dfrac{3}{1-2n} - \dfrac{2}{1-3n}$.

k) $u_n = 2 - \dfrac{3}{6 + \sqrt{n}}$.

l) $u_n = 2 - n\sqrt{5n} + \dfrac{1}{n^2+1}$.

m) $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

n) $u_n = n(n-4)(1-\sqrt{n})$.

o) $u_n = -\mathrm{e}^{1/n^2} n^4$.

p) $u_n = -\mathrm{e}^{1/n^2} n^{-4}$.

Correction de l'exercice 1

a) $+\infty$.

b) $+\infty$.

c) 0.

d) $+\infty$.

e) $+\infty$.

f) $-\infty$.

g) 0.

h) $-\infty$.

i) 0.

j) 0.

k) 2.

l) $-\infty$.

m) $+\infty$.

n) $-\infty$.

o) $-\infty$.

p) 0.

Exercice 2. B

Identifier les formes indéterminées sans aucun calcul.

Identifier parmi les suites dont le terme général est donné ci-après, les situations conduisant à une forme indéterminée lors de l'étude de la convergence, sinon donnez la limite.

On peut schématiquement résumer les formes indéterminées par :

$$(+\infty)-(+\infty),\quad (-\infty)-(-\infty),\quad 0\times\infty,\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \frac{}{0^?}.$$

a) $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2^n}$.

b) n^2-6^n.

c) $\sqrt{n^{-1}}+n!$.

d) $2^{-n}+\sqrt{n}$.

e) $n^{12}+\dfrac{1}{n^{100}}$.

f) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}+n!+1$.

g) $n^2 3^n$.

h) $\dfrac{n^2}{n^{12}}$.

i) $\dfrac{n!}{2^n}$.

j) $n^{-2}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$.

k) $\dfrac{n^{-3}}{\sqrt{n}}$.

l) $n^5 2^{-n}$.

m) $n^{-3}+0,5^n\sqrt{n}$.

n) $\dfrac{1}{n^4}\times \mathrm{e}^n+4$.

o) $\dfrac{\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}$.

Correction de l'exercice 2

a) 0.

b) Indéterminée.

c) $+\infty$.

d) $+\infty$.

e) $+\infty$.

f) $+\infty$.

g) Indéterminée.

h) Indéterminée.

i) Indéterminée.

j) Indéterminée.

k) 0.

l) Indéterminée.

m) Indéterminée.

n) Indéterminée.

o) Indéterminée.

Exercice 3. B

Trouver la limite avec opérations sur les suites de référence.

Déterminez, si possible la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous.

a) $n^7 + 12$.

b) $4^n - 7$.

c) $n^3 + \dfrac{0,1^n}{\sqrt{n}}$.

d) $\dfrac{1}{n} + 4$.

e) $n^{-4} + \sqrt{n}$.

f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2 + \dfrac{1}{n^2}$.

g) $n!n^2 + 2 - \dfrac{1}{n^2}$.

h) $\dfrac{\sqrt{n}}{2 + \mathrm{e}^{-n}}$.

i) $\dfrac{n^4 + 1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 4}$.

j) $\dfrac{n \times 2^n}{3 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}$.

k) $n! - \left(2 - n^2\right)$.

l) $n^2\left(n^3 + \dfrac{3}{\sqrt{n}} + 1\right)$.

m) $2n^3 + 5n^2 + n - 12$.

n) $-5n^3 - 2n^2 - 12n - 3$.

o) $4n^2 - n + 1$.

p) $\dfrac{n^3}{n^2}$.

q) $n^2 + 3^n + 4 - \dfrac{1}{n}$.

Correction de l'exercice 3

a) $+\infty$.

b) $+\infty$.

c) $+\infty$.

d) 4.

e) $+\infty$.

f) 2.

g) $+\infty$.

h) $+\infty$.

i) $-\infty$.

j) $+\infty$.

k) $+\infty$.

l) $+\infty$.

m) $+\infty$.

n) $-\infty$.

o) Indéterminée. $4n^2 - n + 1 = n^2(4 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$. $+\infty$.

p) Indéterminée. $\frac{n^3}{n^2} = n$. $+\infty$.

q) $+\infty$.

Exercice 4. B

Déterminez les limites en levant l'indétermination.

a) $u_n = n^3 - n + 5$.

b) $u_n = n^4 - n^2 + 1$.

c) $u_n = 3n\sqrt{n} - 2n^3$.

d) $u_n = \dfrac{n-3}{n+1}$.

e) $u_n = \dfrac{n^2 - \sqrt{n}}{n+3}$.

f) $u_n = \dfrac{n^2 - n + 4}{3n^2 - 2n + 5}$.

g) $u_n = \sqrt{n^3} - \sqrt{n^3 + 8}$.

h) $u_n = n\sqrt{n^2 + 3} - n^2$.

i) $u_n = n^2 - 3n$.

j) $u_n = 4n^3 - 3n^2 + 2$.

k) $u_n = 3n^4 - 3n^3 - 2n + 1$.

l) $u_n = \dfrac{4n-1}{3n+1}$.

m) $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$.

n) $u_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + n + 1}$.

o) $u_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$.

p) $u_n = \sqrt{5n+4} - \sqrt{5n+2}$.

q) $u_n = \sqrt{4n^2 + n + 3} - 2n$.

r) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2}}$.

s) $u_n = n - \dfrac{n^2}{n+1}$.

t) $u_n = \dfrac{n-3}{2n+1} - \dfrac{n+3}{3n-1}$.

u) $u_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2}{n+2}$.

v) $u_n = \dfrac{n + \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n + 1}}$.

w) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} - n}{n}$.

x) $u_n = \sqrt{n - \sqrt{n}} - \sqrt{n}$.

Correction de l'exercice 4

a) $+\infty$.

b) $+\infty$.

c) $-\infty$.

d) 1.

e) $+\infty$.

f) $\frac{1}{3}$.

g) 0.

h) $+\infty$.

i) $+\infty$.

j) $+\infty$.

k) $+\infty$.

l) $\frac{4}{3}$.

m) 1.

n) $\frac{2}{3}$.

o) 0.

p) 0.

q) $\frac{1}{4}$.

r) $-\infty$.

s) 1.

t) $\frac{1}{6}$.

u) 1.

v) 1. Problème limite sous racine carré.

w) 0.

x) $-\frac{1}{2}$