14 Suites, opérations sur les limites.

I Devinez.

Conjecturez les limites des suites dont les termes généraux sont : n^3+n^2, $\frac{1}{1+0{,}5^n}$, $-n^7+n^2$, $\frac{n^3+n^2}{n^4+n}$, $\frac{n^3}{0{,}5^n}$.

La définition de la convergence permet d'établir la convergence de quelques suites de référence. Pour le reste nous ferons, ce que nous avions déjà fait pour les fonctions dérivées, à savoir obtenir de nouveaux résultat en combinant ceux déjà connus.

II Somme.

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on s'intéresse à la convergence de la suite somme $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de celles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

v_n \ u_n	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
m	$m+\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Les situations avec des " ?" sont appelées des formes indéterminées. Nous ne pouvons pas déterminer si il y a ou non une limite. Il faudra faire des études plus approfondies.

Exemples.

1. 3 est une suite constante (donc qui converge vers 3) et $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers 0 donc $\left(3+\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 3.
2. $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0 et $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$ donc $\left(\frac{1}{n}+\sqrt{n}\right)$ tend vers $+\infty$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+\sqrt{n} = +\infty$.

III Produit.

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on s'intéresse à la convergence de la suite produit $(u_n\times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de celles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

v_n \ u_n	$\ell > 0$	$\ell = 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$m > 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$m = 0$	0	0	0	?	?
$m < 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exemples.

1. -2 est une suite constante (donc qui converge vers -2 et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui diverge vers $+\infty$ donc $(-2\times n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -1\times n^2 = -\infty$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\sqrt{n} = +\infty$.

IV Inverse.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont les termes sont tous non nuls.

u_n	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\dfrac{1}{u_n}$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$

Exemples.

1. Nous pouvons, sachant que $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, retrouver que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2+n} = 0$.
3. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n} > 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n}} = +\infty$.

V Quotient.

Les résultats concernant les suites obtenues comme quotient de deux autres suites découlent des résultats sur les produits et les inverses.

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on s'intéresse à la convergence de la suite produit $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de celles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

u_n \ v_n	$\ell > 0$	$\ell = 0^+$	$\ell = 0^-$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$m > 0$	$\frac{m}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{m}{\ell}$	0	0
$m = 0$	0	?	?	0	0	0
$m < 0$	$\frac{m}{\ell}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{m}{\ell}$	0	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	?
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	?

VI Lever l'indétermination.

Les règles sur les opérations se confrontent souvent à des situations de limite indéterminée.

Pour cette année, le plus efficace est très souvent de factoriser par la plus grande puissance de n apparaissant dans l'expression du terme général de la suite.

Exemples.

1. Si $u_n = n^3 - n$ alors *a priori* c'est une forme indéterminée. Factorisons par n^3 : $u_n = n^3\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. Avec cette expression il n'y a plus de forme indéterminée : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. $u_n = \frac{2n+1}{3n+7}$ correspond à une forme indéterminée, mais, en factorisant par n au numérateur et au dénominateur : $u_n = \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{7}{n}}$.

   Or $\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{1}{n} = 2$ et $\lim_{n\to+\infty} 3+\frac{7}{n} = 3$ donc (u_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$.
3. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ est une forme indéterminée. Pour lever l'indétermination dans cette expression radicale on utilise les expressions conjuguées. $u_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$.

VII Exercices.

Exercice 1. B

Déterminez les limites des suites suivantes.

a) $u_n = n^2 + n + \dfrac{1}{n}$.

b) $u_n = \sqrt{n}\left(n^2 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

c) $u_n = \dfrac{4}{\sqrt{n} + n}$.

d) $u_n = n^3 + n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

e) $u_n = 5n^2 + 3n\sqrt{n}$.

f) $u_n = \sqrt{n}(2 - n - 2n^2)$.

g) $u_n = \dfrac{1}{n^2 + n - 1}$.

h) $u_n = n^2\left(\dfrac{2}{n+1} - 1\right)$.

i) $u_n = \dfrac{3}{n}\left(\dfrac{3}{n^3} - 5\right)$.

j) $u_n = \dfrac{3}{1 - 2n} - \dfrac{2}{1 - 3n}$.

k) $u_n = 2 - \dfrac{3}{6 + \sqrt{n}}$.

l) $u_n = 2 - n\sqrt{5n} + \dfrac{1}{n^2 + 1}$.

m) $u_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

n) $u_n = n(n-4)(1 - \sqrt{n})$.

o) $u_n = -\mathrm{e}^{1/n^2} n^4$.

p) $u_n = -\mathrm{e}^{1/n^2} n^{-4}$.

Exercice 2. B

Identifier parmi les suites dont le terme général est donné ci-après, les situations conduisant à une forme indéterminée lors de l'étude de la convergence, sinon donnez la limite.

On peut schématiquement résumer les formes indéterminées par :

$$(+\infty)-(+\infty),\quad (-\infty)-(-\infty),\quad 0\times\infty,\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \frac{}{0^?}.$$

a) $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2^n}$. b) n^2-6^n. c) $\sqrt{n^{-1}}+n!$.

d) $2^{-n}+\sqrt{n}$. e) $n^{12}+\dfrac{1}{n^{100}}$. f) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}+n!+1$.

g) $n^2 3^n$. h) $\dfrac{n^2}{n^{12}}$. i) $\dfrac{n!}{2^n}$.

j) $n^{-2}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$. k) $\dfrac{n^{-3}}{\sqrt{n}}$. l) $n^5 2^{-n}$.

m) $n^{-3}+0,5^n\sqrt{n}$. n) $\dfrac{1}{n^4}\times \mathrm{e}^n+4$. o) $\dfrac{\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}$.

Exercice 3. B

Déterminez, si possible la limite des suites dont le terme général est donné ci-dessous.

a) n^7+12. b) 4^n-7. c) $n^3+\dfrac{0,1^n}{\sqrt{n}}$.

d) $\dfrac{1}{n}+4$. e) $n^{-4}+\sqrt{n}$. f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+2+\dfrac{1}{n^2}$.

g) $n!n^2+2-\dfrac{1}{n^2}$. h) $\dfrac{\sqrt{n}}{2+\mathrm{e}^{-n}}$. i) $\dfrac{n^4+1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-4}$.

j) $\dfrac{n\times 2^n}{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$. k) $n!-\left(2-n^2\right)$. l) $n^2\left(n^3+\dfrac{3}{\sqrt{n}}+1\right)$.

m) $2n^3+5n^2+n-12$. n) $-5n^3-2n^2-12n-3$. o) $4n^2-n+1$.

p) $\dfrac{n^3}{n^2}$. q) $n^2+3^n+4-\dfrac{1}{n}$.

Exercice 4. B

Déterminez les limites en levant l'indétermination.

a) $u_n = n^3 - n + 5$.

b) $u_n = n^4 - n^2 + 1$.

c) $u_n = 3n\sqrt{n} - 2n^3$.

d) $u_n = \dfrac{n-3}{n+1}$.

e) $u_n = \dfrac{n^2 - \sqrt{n}}{n+3}$.

f) $u_n = \dfrac{n^2 - n + 4}{3n^2 - 2n + 5}$.

g) $u_n = \sqrt{n^3} - \sqrt{n^3 + 8}$.

h) $u_n = n\sqrt{n^2 + 3} - n^2$.

i) $u_n = n^2 - 3n$.

j) $u_n = 4n^3 - 3n^2 + 2$.

k) $u_n = 3n^4 - 3n^3 - 2n + 1$.

l) $u_n = \dfrac{4n-1}{3n+1}$.

m) $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$.

n) $u_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + n + 1}$.

o) $u_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$.

p) $u_n = \sqrt{5n+4} - \sqrt{5n+2}$.

q) $u_n = \sqrt{4n^2 + n + 3} - 2n$.

r) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2}}$.

s) $u_n = n - \dfrac{n^2}{n+1}$.

t) $u_n = \dfrac{n-3}{2n+1} - \dfrac{n+3}{3n-1}$.

u) $u_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2}{n+2}$.

v) $u_n = \dfrac{n + \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n + 1}}$.

w) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} - n}{n}$.

x) $u_n = \sqrt{n - \sqrt{n}} - \sqrt{n}$.

Exercice 5. BAC

— Centres étrangers groupe 2 sujet 1 21 mars 2023. Arbre probabiliste, suites, limites.

Exercice 6. C épisode 1.

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distincts, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un où l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à $0,84$;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à $0,76$.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

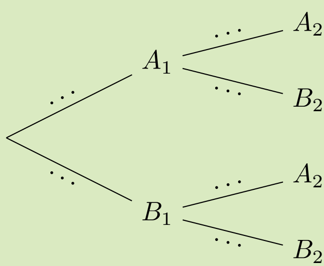
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les évènements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

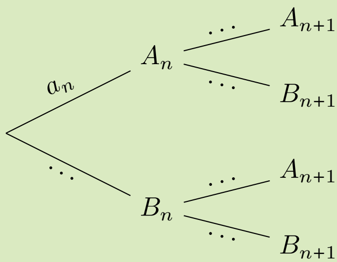
Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n. Ainsi $a_1 = 0,5$ et $b_1 = 0,5$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



Exercice 6. épisode 2.

2. (a) Calculer a_2.
   (b) Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.
3. (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



   (b) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.
5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0,599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Exercice 7. D

1. Baccalauréat S Métropole 23 juin 2009