13 Plans de l'espace.

I Comment définir un plan ?

Voyons d'abord les choses à la façon de la géométrie affine classique. Qu'est-ce qu'une droite ? Un segment, et donc deux points, prolongé à l'infini des deux côtés.

Pour définir un plan il nous faut un petit morceau de plan. Le plus petit polygone est un triangle et donc la donnée de trois points. Qu'est-ce qu'un plan ? Un triangle prolongé jusqu'à l'infini.

C'est pourquoi la notation affine des plans, très semblable à celle des droites, sera (ABC) pour le plan contenant les points A, B et C. Bien entendu pour que trois points définissent un plan il faut qu'ils soient distincts deux à deux et non alignés.

II Direction.

Passons à une définition vectorielle du plan. À partir d'un point un vecteur (non nul) définit une unique droite. Pour définir un plan il faudra au moins deux vecteurs. Pour le plan (ABC) on pourra choisir A et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Définition 1

Soient :

. A, B et C trois points distincts deux à deux et non alignés de l'espace affine $\mathscr{E}_3$.

Nous noterons (ABC), et nous appellerons *plan passant par A, B et C*, l'ensemble de tous les points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ soit une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Autrement dit :

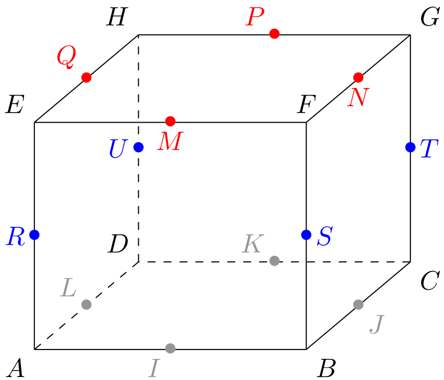
$$(AB) = \left\{ M \in \mathscr{E}_3 \mid \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \right\}.$$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ jouent, pour les plans, le même rôle que le vecteur directeur pour la droite. Ils dirigent le plan. *La direction du plan* est l'ensemble de tous les vecteurs qui peuvent être obtenus comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On dit encore que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment *une base* du plan (ABC). Si E, F, G et H sont des points du plan ABC alors $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ forment une base de (ABC) si et seulement si $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont non nuls et non colinéaires entre eux.

Pour définir un plan il suffit d'en donner un point et une base. Autrement dit *un plan est entièrement caractérisé par la donnée d'un point et de deux vecteurs non colinéaires de sa direction*. Pour parler d'un plan on peut en donner trois points distincts non alignés (A, B et C) ou en donner un point (A) et deux vecteurs non colinéaires de sa direction ($\vec{u}$ et $\vec{v}$).

III Exercices.



Exercice 1. B

Donnez dans chaque cas un quatrième point du plan proposé. Par exemple, pour (ABC) le point D convient : $D \in (ABC)$.

a) (DEF). b) (HCD). c) (EFB). d) (BCF).
e) (FHG). f) (UJT). g) (PRM). h) (LBS).
i) (MJI). j) (DNH). k) (NGT). l) (PQN).
m) (RQM). n) (USR). o) (HRT).

Exercice 2. B

Nommez par trois points distincts deux à deux et non alignés, le plan dont on donne un point et une base.
Par exemple pour A et $\left(\overrightarrow{DU}, \overrightarrow{AB}\right)$, le plan est (ABR), ou (ASF).

a) S et $\left(\overrightarrow{SN}, \overrightarrow{AD}\right)$. b) S et $\left(\overrightarrow{LU}, \overrightarrow{DC}\right)$. c) D et $\left(\overrightarrow{GT}, \overrightarrow{US}\right)$.
d) M et $\left(\overrightarrow{EQ}, \overrightarrow{HP}\right)$. e) K et $\left(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BS}\right)$. f) U et $\left(\overrightarrow{UE}, \overrightarrow{UP}\right)$.
g) M et $\left(\overrightarrow{UH}, \overrightarrow{KB}\right)$. h) D et $\left(\overrightarrow{UM}, \overrightarrow{GT}\right)$. i) U et $\left(\overrightarrow{SG}, \overrightarrow{HS}\right)$.

Exercice 3. B

Lisez sur la figure la décomposition en combinaison linéaire du vecteur proposé sur la base donnée.
Par exemple, pour $\overrightarrow{AC}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$, on peut écrire : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

a) $\overrightarrow{AK}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

b) $\overrightarrow{DB}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

c) $\overrightarrow{IK}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

d) $\overrightarrow{LB}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

e) $\overrightarrow{DU}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

f) $\overrightarrow{FP}$ et $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}\right)$.

g) $\overrightarrow{EJ}$ et $\left(\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{QC}\right)$.

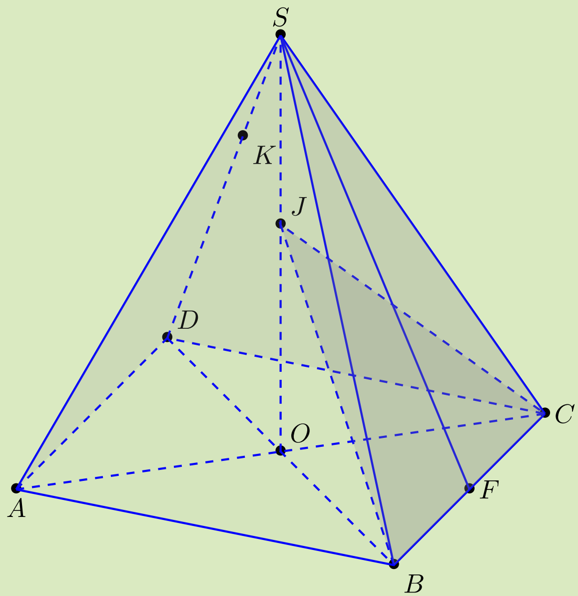
h) $\overrightarrow{IM}$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right)$.

i) $\overrightarrow{BH}$ et $\left(\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BA}\right)$.

Exercice 4. B

Donnez quatre points non coplanaires du cube.

Exercice 5. B



Donnez au moins deux bases non triviales des plans suivants. Exemple : pour le plan (ABC), $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}\right)$ est une base triviale, $\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OC}\right)$ n'est pas une base mais $\left(\overrightarrow{OA}, \rightarrow OD\right)$ est une base qui convient.

a) (ODJ).

b) (BCJ).

c) (ADK).

d) (SDC).

e) (DOC).

f) (ABS).