11 Listes, permutations, combinaisons.

I Arrangements.

1 Arrangements.

2 Permutations.

II Combinaisons.

1 Définition.

2 Propriétés des coefficients binomiaux.

3 Formule du binôme de Newton.

III Exercices.

Exercice 1. B

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \binom{n}{n-1} = n.$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)! = (n+1)n!.$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n}.$

Exercice 2. B

Une urne contient quatre boules blanches et trois boules noires On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles ne comportant que des boules blanches ?
3. Combien y a-t-il de tirages unicolores ?
4. Combien y a-t-il de tirages comportant une boule blanche et deux boules noires ?

Exercice 3. B

On choisit au hasard simultanément quatre cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles comportant le roi de cœur ?
3. Combien y a-t-il de tirages comportant quatre cœurs ?
4. Combien y a-t-il de tirages ne comportant aucun as ?

Exercice 4. B

Le code d'une carte de crédit est formé de quatre chiffres distincts.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes ne comportant que des chiffres pairs ?
3. Combien y a-t-il de codes commençant par le chiffre 2 ?

Exercice 5. B

Un numéro de téléphone est constitué de 10 chiffres dont le premier est 0 et les neuf autres quelconques.

1. Combien y a-t-il de numéros possibles ?
2. Combien y a-t-il de numéros possibles commençant par 06 ?
3. Calculez le nombre de numéros contenant
   (a) les dix chiffres,
   (b) exactement 3 fois le chiffre 6.

Exercice 6. B

Un code est formé d'une lettre suivie de trois chiffres.

1. Combien y a-t-il de chiffres possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes commençant par la lettre A ?
3. Combien y a-t-il de codes commençant par A et contenant les chiffres 1, 2 et 3 ?

Exercice 7. B

Un fleuriste dispose de 5 roses, trois tulipes, deux tournesols et quatre feuillages décoratifs pour composer un bouquet.

1. Combien de bouquets constitués de trois fleurs et d'un feuillage peut-il composer ?
2. Il décide de mettre une fleur de chaque espèce avec un feuillage pour constituer son bouquet. Quel est le nombre de bouquets possibles ?

Exercice 8. B

Lors d'une course hippique on peut parier sur les cinq premiers chevaux à l'arrivée. On parle alors de quinté. 15 chevaux, numérotés de 1 à 15, sont au départ. Combien y a-t-il de quintés différents :

1. en tenant compte de l'ordre ?
2. sans tenir compte de l'ordre ?

Exercice 9. B

Une urne contient 100 jetons numérotés de 1 à 100. On tire simultanément deux jetons de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possible ?
2. Quelle est la probabilité de tirer deux numéros pairs ?
3. Parmi les événements suivants, quel est le plus probable ?
   (a) A : « la somme des numéros est paire »,
   (b) B : « la somme des numéros est impaire ».

Exercice 10. B

Combien peut-on former de mots de 5 lettres

1. comportant des lettres différentes ?
2. commençant par une voyelle et finissant par une consonne ?
3. contenant exactement une voyelle ?

Exercice 11. D

Démontrez que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

Correction de l'exercice 11

On fait la somme des parties de E avec 0 éléments, puis 1 élément, puis 2, ..., jusqu'à n éléments. Ou on applique la formule du binôme de Newton.

Exercice 12. D

Démontrez $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

Exercice 13. D

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \mapsto (1+x)^n$.

1. Calculez f' à partir de l'expression factorisée de f puis à partir de son expression développée.
2. Démontrez
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}.$$

Exercice 14. D

Exercice 15. D

Exercice 16. D - Formule de Leibniz

La fonction dérivée d'une fonction f est notée f'. La dérivée de la fonction dérivée, notée f'' ou $f^{(2)}$, est appelée la *dérivée seconde* ou *dérivée d'ordre 2*.
Nous définirons plus généralement le *fonction dérivée d'ordre n* (n entier naturel) d'une fonction la fonction obtenue en dérivant n fois la fonction f et nous la noterons $f^{(n)}$.

Soient u et v des fonctions indéfiniment dérivables.
Déterminez la dérivée d'ordre n de la fonction produit uv.

Exercice 17. E

Montrez :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall r \in [\![1, n]\!],\ \binom{n}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}.$$

Correction de l'exercice 17

Par récurrence sur n.

Exercice 18. E

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x}{k}\right)$.

1. Que valent $P_n(0)$, $P_n(1)$ et $P_n(-n)$?
2. Démontrez que pour tout réel non nul x, on a
$$P_n(x) = \frac{x+n}{x} P_n(x-1).$$
3. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, écrire $P_n(p)$ comme coefficient du binôme.

Exercice 19. E

Soit $(p, q) \in]0, 1[^2$ tel que $p + q = 1$.
Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \prod_{k=0}^{n} \exp\left(\binom{n}{k} p^k q^{n-k}\right)$.

1. Déterminez $\ln(A_n)$.
2. Déduisez-en A_n pour $n \in \mathbb{N}$.