Suites, limites et comparaisons.

I Limites finies.

II Limites infinies.

III Exercices.

Exercice 1. B

Déterminez la limite de la suite (u_n) sachant que pour tout entier naturel n $4-0,9^n \leqslant u_n \leqslant 4+0,1^n$.

Exercice 2. B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0=0$ et $u_{n+1}=u_n^2+1$.

1. Montrez que pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 2^n$.
2. Déduisez-en la limite de (u_n).

Exercice 3. B

Déterminez si elles existent les limites des suites suivantes.

a) $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$;

b) $u_n=\dfrac{\cos(n)}{n^2}$;

c) $u_n=\dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$;

d) $u_n=\dfrac{1}{n}+3^n$;

e) $u_n=\dfrac{n^2+\sin(n)}{n^3}$;

f) $u_n=\dfrac{1}{6^n}+n^{-3}$.

g) $u_n=-0,5^n+\sqrt{n}$.

h) $u_n=-n^3-2n^2$.

i) $u_n=n^2+4n+1$.

j) $u_n=1+\left(\dfrac{1}{6}\right)^n+n^3$.

k) $u_n=n+(-1)^n$;

l) $u_n=n^2-\sin(n)$;

m) $u_n=\sin\left(\sqrt{\cos\left(n^2-n^n\right)}\right)-n$.

n) $u_n=n!+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

o) $u_n=n!+\sqrt{n}$.

p) $u_n=\left(\dfrac{99}{100}\right)^n\sin(n)$.

q) $u_n=n^2+2n+(-1)^n n$.

r) $u_n=5-\dfrac{\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$.

Correction de l'exercice 3

a) $-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) $-\frac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 4. B

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$:

$$u_n = 1 + \frac{1}{n+(-1)^n}.$$

1. Montrez que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$ on a :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant u_n - 1 \leqslant \frac{1}{n-1}.$$

2. Déterminez les limites des suites de termes généraux :

$$\frac{1}{n+1} \text{ et } \frac{1}{n-1}.$$

3. Concluez quant à la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5. C

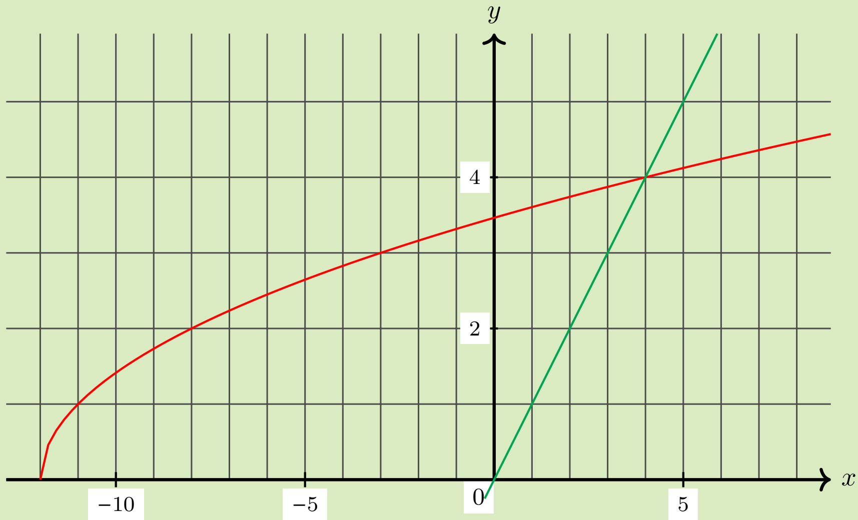
Démontrez que si $q \in]-1;1[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Exercice 6. C

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 8 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}.$$

1. Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 4$.
2. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-12; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+12}$.



Construisez les premiers de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et conjecturez son comportement.

3. (a) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - 4 \leqslant \frac{1}{4}(u_n - 4).$$

   (b) Déduisez-en, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n - 4 \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}.$$

4. Déduisez-en que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie que l'on précisera.

Exercice 7. D

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Écrivez un algorithme permettant de calculer les termes $u_0, \dots, u_n$, où n est un entier saisi à la demande.
2. Programmez le précédent algorithme, exécutez-le puis donnez les termes u_1 à u_{10}.
3. Étudiez la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. (a) Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.
   (b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Conjecturez une expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n nombre entier naturel, puis démontrez la propriété ainsi conjecturée.

Correction de l'exercice 7

1.

```
def termessuite(n):
u=[1]
for i in range(1,n+1):
u=u+[u[i-1]+2*(i-1)+3]
return(u)
```

2. $u_1 = 4$, $u_2 = 9$, $u_3 = 16$, $u_4 = 25$, $u_5 = 36$, $u_6 = 49$, $u_7 = 64$, $u_8 = 81$, $u_9 = 100$, $u_{10} = 121$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   D'après la formule de récurrence : $u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0$ donc

   (u_n) est strictement croissante.

4. (a) Par récurrence.
   Remarquons que dans ce cas nous aurions du mal à définir une fonction f telle que $u_{n+1} = u_n$.
   Clairement : $n^2 + 2n + 3 > n^2$.
   (b) $n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $u_n > n^2$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
5. $u_n = (n+1)^2$.