10 Suites, limites et comparaisons.

I Limites finies.

Proposition 1 - Théorème des gendarmes.

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles,

. $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{array}\right. \Rightarrow \left[\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell\right].$$

Démonstration

Soient a et b deux réels tels que $a < \ell < b$.

Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $u_n \in]a,b[$.

De même il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $w_n \in]a,b[$.

Donc à partir du rang $N = \max(N_1, N_2)$, $u_n \in]a,b[$ et $v_n \in]a,b[$.

Puisque $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, forcément $v_n \in]a,b[$.

Ainsi quel que soit l'intervalle ouvert $]a,b[$ contenant ℓ, à partir d'un certain rang, cet intervalle contient tous les termes de la suite (v_n).

(v_n) converge vers ℓ.

■

Proposition 2 - Passage à la limite dans des inégalités (et égalités).

Soient :

. $a, b \in \mathbb{R}$,

. $\ell \in \mathbb{R}$,

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers ℓ.

(i) $[\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant b] \Rightarrow [\ell \leqslant b]$.

(ii) $[\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant a] \Rightarrow [\ell \geqslant a]$.

(iii) $[\forall n \in \mathbb{N},\ a \leqslant u_n \leqslant b] \Rightarrow [a \leqslant \ell \leqslant b]$.

Le résultat n'est pas valable pour des inégalités strictes. Par exemple $0 < \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel non nul et pourtant $0 \not< \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$.

II Limites infinies.

Proposition 3

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.

$$\text{(i)} \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \left[\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty\right].$$

$$\text{(ii)} \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \left[\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty\right].$$

Démonstration

(i) Nous devons démontrer que (v_n) tend vers $+\infty$ avec deux hypothèses : (u_n) tend vers $+\infty$ et $u_n \leqslant v_n$ pour tout n. Nous allons établir que (v_n) vérifient la définition d'une suite divergeant vers $+\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

Démontrons que, à partir d'un certain rang, tous les termes de (v_n) appartiennent à l'ouvert $]A;+\infty[$.

Nous allons procéder en deux temps : trouver le rang N à partir duquel ça fonctionnera puis montrer qu'effectivement à partir de ce rang tous les termes de (v_n) sont dans l'intervalle. Le N nous sera donné par (u_n).
Puisque (u_n) tend vers $+\infty$, il existe un rang N pour lequel :

$$\forall n \geqslant N,\ A < u_n.$$

Or, par hypothèse :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n,$$

donc, par transitivité

$$\forall n \geqslant N,\ A < v_n.$$

Autrement dit : $v_n \in]A;+\infty[$.

$$\boxed{(v_n) \text{ tend vers } +\infty.}$$

(ii) Il suffit de considérer les suites $(-u_n)$ et $(-v_n)$ et d'appliquer le (i).

■

Exemples.

1. $\left(\sin(n)+\mathrm{e}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
2. ♥ La suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

III Exercices.

Exercice 1. B

Déterminez la limite de la suite (u_n) sachant que pour tout entier naturel n $4-0,9^n \leqslant u_n \leqslant 4+0,1^n$.

Exercice 2. B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0=0$ et $u_{n+1}=u_n^2+1$.

1. Montrez que pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 2^n$.
2. Déduisez-en la limite de (u_n).

Exercice 3. B

Déterminez si elles existent les limites des suites suivantes.

a) $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$;

b) $u_n=\dfrac{\cos(n)}{n^2}$;

c) $u_n=\dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$;

d) $u_n=\dfrac{1}{n}+3^n$;

e) $u_n=\dfrac{\sin(n)}{n^3}$;

f) $u_n=\dfrac{1}{6^n}$.

g) $u_n=0,5^n+\sqrt{n}$.

h) $u_n=-n^3-2n^2$.

i) $u_n=n^2+4n+1$.

j) $u_n=1+\left(\dfrac{1}{6}\right)^n+n^3$.

k) $u_n=n+(-1)^n+1$;

l) $u_n=n^2-\sin(n)+1$;

m) $u_n=\sin\left(\sqrt{\cos\left(n^2-n^n\right)}\right)-n-1$.

n) $u_n=n!+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

o) $u_n=n!+\sqrt{n}$.

p) $u_n=\left(\dfrac{99}{100}\right)^n\sin(n)$.

q) $u_n=n^2+2n+(-1)^n n$.

r) $u_n=5-\dfrac{\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$.

Exercice 4. B

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$:

$$u_n = 1 + \frac{1}{n + (-1)^n}.$$

1. Montrez que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$ on a :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant u_n - 1 \leqslant \frac{1}{n-1}.$$

2. Déterminez les limites des suites de termes généraux :

$$\frac{1}{n+1} \text{ et } \frac{1}{n-1}.$$

3. Concluez quant à la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 5. C

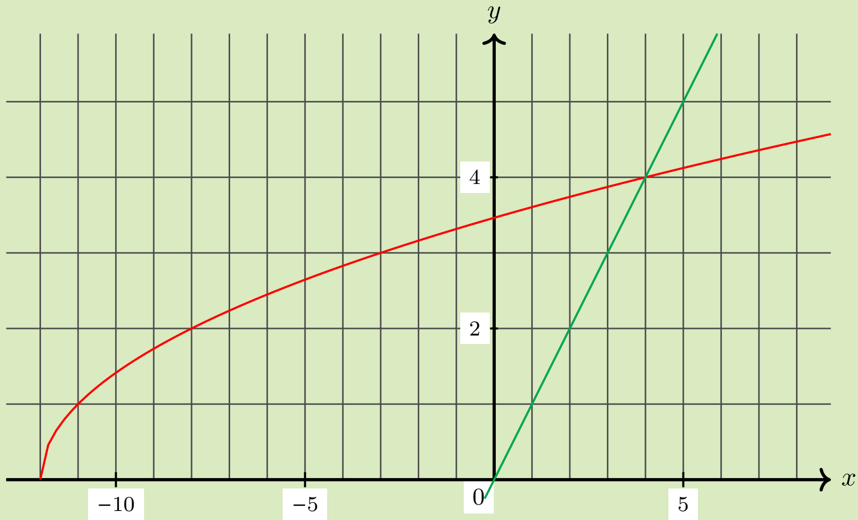
Démontrez que si $q \in]-1;1[$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Exercice 6. C

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 8 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}.$$

1. Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 4$.
2. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-12; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x + 12}$.



   Construisez les premiers de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et conjecturez son comportement.
3. (a) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - 4 \leqslant \frac{1}{4}(u_n - 4).$$

   (b) Déduisez-en, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n - 4 \leqslant \frac{1}{4^{n-1}}.$$

4. Déduisez-en que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie que l'on précisera.

Exercice 7. D

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Écrivez un algorithme permettant de calculer les termes $u_0, \ldots, u_n$, où n est un entier saisi à la demande.
2. Programmez le précédent algorithme, exécutez-le puis donnez les termes u_1 à u_{10}.
3. Étudiez la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. (a) Démontrez que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

   (b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Conjecturez une expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n nombre entier naturel, puis démontrez la propriété ainsi conjecturée.