

09 Raisonnement par récurrence.

I Logique : propositions, assertions.

II Le théorème du raisonnement par récurrence.

III Exercices.

Exercice 1. B

Montrer que les propositions suivantes sont vraies pour tout entier naturel n .

1. $2^{n+4} + 3^{3n+2}$ est divisible par 5.
2. $3^{6n+2} - 2$ est divisible par 7.
3. $n^3 - n$ est divisible par 3.
4. $4^n - 1 - 3n$ est divisible par 9.
5. $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11.

Correction de l'exercice 1

1.

$$\begin{aligned} 2^{(n+1)+4} + 3^{3(n+1)+2} &= 2^{n+5} + 3^{3n+5} \\ &= 2 \times 2^{n+4} + 3^{3n+5} \end{aligned}$$

Astuce :

$$\begin{aligned} 2^{(n+1)+4} + 3^{3(n+1)+2} &= 2 \times 2^{n+4} + 2 \times 3^{3n+2} - 2 \times 3^{3n+2} + 3^{3n+5} \\ &= 2 \left(2^{n+4} 3^{3n+2} \right) - 2 \times 3^{3n+2} + 3^3 \times 3^{3n+2} \\ &= 2 \left(2^{n+4} 3^{3n+2} \right) + (-2 + 3^3) \times 3^{3n+2} \\ &= 2 \left(2^{n+4} 3^{3n+2} \right) + 25 \times 3^{3n+2} \end{aligned}$$

25 est divisible par 5 et, d'après l'hypothèse de récurrence $2^{n+4} 3^{3n+2}$ est divisible par 5 donc $2^{(n+1)+4} + 3^{3(n+1)+2}$ est divisible par 5.

2.

$$\begin{aligned} 3^{6(n+1)+2} - 2 &= 3^6 \times 3^{6n+2} - 2 \\ &= 3^6 \times (3^{6n+1} - 2) + 3^6 \times 2 - 2 \\ &= 3^6 \times (3^{6n+1} - 2) + 3^6 \times 2 - 2 \\ &= 3^6 \times (3^{6n+1} - 2) + 7 \times 208 \end{aligned}$$

3. Version brève : $(n-1)n(n+1)$ est le produit de trois entiers consécutifs et l'un de ces facteurs est forcément multiple de 3.

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\ &= n^3 - n + 3(n^2 - n)\end{aligned}$$

Or $3(n^2 - n)$ est divisible par 3 et, d'après l'hypothèse de récurrence, $n^3 - n$ est divisible par 3 donc $(n+1)^3 - (n+1)$ est divisible par 3.

4.

$$\begin{aligned}4^{n+1} - 1 - 3(n+1) &= 4 \times 4^n - 1 - 3(n+1) \\ &= 4 \times (4^n - 1 - 3n) + 4 + 12n - 1 - 3(n+1) \\ &= 4 \times (4^n - 1 - 3n) + 9n\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}7 \times 3^{5(n+1)} + 4 &= 7 \times 3^5 \times 3^{5n} + 4 \\ &= 3^5 \times (7 \times 3^{5n} + 4) - 3^5 \times 4 + 4 \\ &= 3^5 \times (7 \times 3^{5n} + 4) - 968 \\ &= 3^5 \times (7 \times 3^{5n} + 4) - 88 \times 11\end{aligned}$$

Exercice 2. B

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$.
Démontrez, pour tout entier naturel n , que :

$$u_n = 5 \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right).$$

Correction de l'exercice 2

Par définition de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \quad (1).$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_n = 5 \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right),$$

donc, en remplaçant u_n dans l'égalité (1) on obtient :

$$u_{n+1} = \frac{2}{5} \left[5 \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right) \right] + 3$$

À ce stade nous avons obtenu une formule explicite de u_{n+1} . Mais la présentation n'est pas tout à fait celle désirée. Modifions-la.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2 - 5 \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 3 \\ &= 5 - 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \\ &= 5 \times 1 - 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \\ &= 5 \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

Exercice 3. B

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 5$ et, pour $n \geq 2$: $u_n = 2u_{n-1} - n$.
Démontrez, pour tout entier naturel non nul n , que :

$$u_n = 2(2^{n-1} + 1) + n.$$

Correction de l'exercice 3

Par définition de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$u_{n+1} = 2u_n - (n+1) \quad (1).$$

Cette formule de récurrence a été obtenue en remplaçant n par $n+1$ dans la formule de l'énoncé : pas de difficulté puisque cette formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

Or, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_n = 2(2^{n-1} + 1) + n,$$

donc, en remplaçant u_n dans l'égalité (1) on obtient :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2 \left[(2^{n-1} + 1) + n \right] - (n+1) \\ &= 2 \times 2 \times 2^{n-1} + 4 + 2n - n - 1 \\ &= 2 \times 2^n + 2 + n \\ &= 2(2^n + 1) + n \end{aligned}$$

Exercice 4. B

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3u_n + n + 1$.
Démontrez, pour tout entier naturel n , que :

$$u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2}.$$

Correction de l'exercice 4

Par définition de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$:

$$u_{n+1} = 2u_n + n + 1 \quad (1).$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2},$$

donc, en remplaçant u_n dans l'égalité (1) on obtient :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3 \left[\frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{n}{2} \right] + n + 1 \\ &= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{9}{4} - \frac{3n}{2} + n + 1 \\ &= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{6}{4} - \frac{3n}{2} + n + 1 \\ &= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} - \frac{3n}{2} + \frac{2n}{2} + \frac{2}{2} \\ &= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} + \frac{-3 - 3n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} + \frac{-n - 1}{2} \\ &= \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

Exercice 5. B

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = \frac{1}{4} \text{ et } u_{n+1} = 5u_n - 1.$$

1. Calculez les trois premiers termes de la suite (u_n) .
2. Conjecturez son expression explicite.
3. Démontrez la.

Correction de l'exercice 5

1. $u_0 = u_1 = u_2 = \frac{1}{4}$.
2. (u_n) semble être constante égale à $\frac{1}{4}$.
3. Démonstration par récurrence.

Pour l'hérédité :

$$u_{n+1} = 5u_n - 1$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5 \times \frac{1}{4} - 1 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Exercice 6. B

On définit par récurrence la *factorielle* d'un entier naturel n et que l'on note $n!$ de la façon suivante :

$$0! = 1 \text{ et } (n + 1)! = (n + 1) \times n!.$$

Démontrez que pour tout entier n supérieur ou égale à 1, $n! = 1 \times \dots \times n$.

Exercice 7. B

Montrez par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = -2$ est croissante.

Exercice 8. B

Montrez par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 2020$ est croissante.

Exercice 9. B

Montrez par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \frac{2}{3 - u_n} - 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1,8$ est bornée par 1 et 2 et décroissante.

Exercice 10. C

On considère la proposition suivante :

$$\mathcal{P}(n) : \ll 9 \text{ divise } 10^n + 1 \gg.$$

1. Démontrez, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que : si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
2. Qu'en est-il de $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$ et $\mathcal{P}(3)$? Que semble-t-il légitime de conjecturer ?
3. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: 9 divise $10^n - 1$.
4. Déduisez-en à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est fausse.

Correction de l'exercice 10

1.

$$\begin{aligned} 10^{n+1} + 1 &= 10 \times (10^n + 1) - 10 + 1 \\ &= 10 \times (10^n + 1) - 9 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 10^0 + 1 &= 2 \\ 10^1 + 1 &= 11 \\ 10^2 + 1 &= 101 \\ 10^3 + 1 &= 1001 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} 10^{n+1} - 1 &= 10(10^n - 1) + 10 - 1 \\ &= 10(10^n - 1) + 9 \end{aligned}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Démontrons en raisonnant par l'absurde que $\mathcal{P}(n)$ est fausse.

Supposons que $10^n + 1$ est divisible par 9. Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $10^n + 1 = 9k$.
D'autre part, d'après les questions précédentes $10^n - 1$ est divisible par 9 donc il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $10^n - 1 = 9p$.

On en déduit successivement :

$$\begin{aligned} 10^n + 1 - (10^n - 1) &= 9k - 9p \\ 2 &= 9(k - p) \end{aligned}$$

Donc 2 est divisible par 9 ce qui est absurde car : $0 < 2 < 9$.

Nous avons démontré par l'absurde que $10^n + 1$ n'est pas divisible par 9, et ce, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. C

Exprimez en fonction de n les sommes données.

$$\text{a) } \sum_{p=0}^n (4p - 1).$$

$$\text{b) } \sum_{p=1}^{n-1} (3p + 5).$$

$$\text{c) } \sum_{p=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\text{d) } \sum_{p=1}^{n+1} 3 \times 5^{-n}.$$

$$\text{e) } \sum_{p=0}^{n-1} p(p + 1).$$

$$\text{f) } \sum_{p=1}^{n+1} (p - 2)^2.$$

$$\text{g) } \sum_{p=0}^n 3^{2p+1}.$$

$$\text{h) } \sum_{p=0}^{n-1} 3 \times 2^p - 1.$$

Exercice 12. C

Exprimez les sommes suivantes à l'aide du symbole Σ , puis calculez-les.

$$\text{a) } S = 5 + 8 + 11 + 14 + \dots + 2012.$$

$$\text{b) } T = 2^2 + 2^5 + 2^8 + \dots + 2^{20}.$$

$$\text{c) } R = 1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \dots + 10^{10}.$$

$$\text{d) } U = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n, \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{e) } V = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n}, \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 13. C

Montrez, pour tout entier naturel n , que :

$$\text{a) } \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$\text{b) } \sum_{i=0}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

Correction de l'exercice 13

a) Quelques éléments pour l'hérédité.

$\mathcal{P}(n+1)$ est une égalité, donc de la forme $A = B$. Pour la démontrer nous transformer l'écriture de A et de B en montrant $A = C$ et $B = C$ pour conclure $A = B$.

D'une part :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n+1} i^2 &= (n+1)^2 + \sum_{i=0}^n i^2 \\
 &= (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{6(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{6(n^2 + 2n + 1) + (n^2 + n)(2n + 1)}{6} \\
 &= \frac{6n^2 + 12n + 6 + 2n^3 + n^2 + 2n^2 + n}{6} \\
 &= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}
 \end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}
 \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
 &= \frac{(n^2 + 3n + 2)(2n + 3)}{6} \\
 &= \frac{2n^3 + 3n^2 + 6n^2 + 9n + 4n + 6}{6} \\
 &= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}
 \end{aligned}$$

donc, par transitivité,

$$(n+1)^2 + \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- b) Pour démontrer l'hérédité il faut établir une égalité $A = B$. Nous allons partir de B et en développant astucieusement faire apparaître A .

$$\begin{aligned} \left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \right]^2 &= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2 \\ &= \left[\frac{(n+1)n + (n+1)2}{2} \right]^2 \\ &= \left[\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \right]^2 \end{aligned}$$

En développant avec une identité remarquable :

$$\left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \right]^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + n(n+1)(n+1) + (n+1)^2$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \right]^2 = n(n+1)^2 + 1 \times (n+1)^2 + \sum_{i=0}^n i^3$$

En factorisant :

$$\begin{aligned} \left[\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \right]^2 &= (n+1)(n+1)^2 + \sum_{i=0}^n i^3 \\ &= (n+1)^3 + \sum_{i=0}^n i^3 \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} i^3 \end{aligned}$$

Exercice 14. D

Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que :

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i.$$

Aide. Pour l'hérédité on utilisera le fait que : $a^{n+1} - a^{n+1} = a \times a^n - b \times b^n$ et $a = (a-b) + b$.

Exercice 15. ♣

Exercice 16. D

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par :

$$u_1 = u_2 = 1 \text{ et } u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n.$$

Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = (-2)^n - 3 \times (-1)^n.$$

Exercice 17. D

Soit I un intervalle ou une réunion d'intervalles de \mathbb{R} et f une fonction définie sur I .

Montrez que, si la fonction f vérifie la propriété :

$$\mathcal{P} : \text{« pour tout } x \in I, f(x) \in I \text{ »},$$

alors on peut définir sur \mathbb{N} la suite numérique (u_n) de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

De plus, la suite numérique (u_n) vérifie la propriété :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in I.$$

Exercice 18. D

Soient $f : I \rightarrow I$ une fonction croissante, $u_0 \in I$ et (u_n) la suite définie par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Démontrez que, si $u_0 > u_1$, alors (u_n) est décroissante.