08 Suites, limites finies.

I Définition.

Définition 1

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle,

. $\ell \in \mathbb{R}$.

Nous dirons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ si et seulement si, quelque soit l'intervalle ouvert contenant ℓ, à partir d'un certain rang tous les termes de la suite sont dans cet intervalle.

Si c'est le cas nous noterons : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et ℓ est appelé la limite de la suite.

Exemples.

1. Toute suite stationnaire (constante à partir d'un certain rang) est convergente.
2. Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.
   Nous avons déjà conjecturé en classe de première que cette suite converge vers 0.
   Démontrons-le.

   Démontrons que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

   Soient a et b des réels tels que $a < 0 < b$. Ainsi $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert contenant 0.

   * Analyse.
     Concrètement cette phase est une phase de recherche. On cherche la valeur du rang à partir duquel les termes de la suite sont dans l'intervalle I en faisant comme si on l'avait déjà trouvé.

     Supposons que nous ayons trouvé un nombre entier N à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n \geqslant N$, alors $u_n \in I$. Autrement dit :
     $$a < u_n < b.$$

     Donc :
     $$\frac{1}{n} < b,$$

i.e., la fonction inverse étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$n > \frac{1}{b}.$$

* Synthèse.

  Soit $N = \left\lfloor \frac{1}{b} + 1 \right\rfloor$.

  Si nous prenons n plus grand que le rang N alors :

$$\begin{aligned} n &\geqslant N \\ n &\geqslant \left\lfloor \frac{1}{b} + 1 \right\rfloor \\ n &> \frac{1}{b} \end{aligned}$$

  Puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{n} < b$$

  Comme de plus $a < 0 < \frac{1}{n}$ nous avons bien : $a < \frac{1}{n} < b$.

  Autrement dit : $\frac{1}{n} \in]a, b[$.

  À partir du rang N tous les termes de la suite sont dans $]a, b[$.

Quel que soit l'intervalle I contenant 0 il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite sont dans I.

Autrement dit, par définition :

$$\boxed{\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0.}$$

On note $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ ou $\frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et ℓ est appelé la limite de la suite.

Nous ne le démontrerons pas mais il y a unicité de la limite d'une suite. Par conséquent démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ équivaut à démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \ell| = 0$.

Nous pourrons donc dire lorsqu'il y a convergence que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \ell = 0$.

Nous remarquons comme une conséquence directe de la définition que toute suite convergente est bornée. La réciproque n'est pas vraie comme le montre $\left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

II Suites de référence.

Proposition 1 - Inverse des limites infinies.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$.

Corollaire 1 - Limites de référence.

(i) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$.

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

(iii) Si $|q| > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{q^n} = 0$.

Le troisième point du corollaire peut aussi s'écrire : si $q \in]-1;1[$ (ou encore $|q| < 1$) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

III Exercices.

Exercice 1. B

Déterminez la limite des suites suivantes.

a) $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
b) $\left(\frac{\sqrt{n}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
c) $\left(n^{12}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
d) $\left(\frac{1}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
e) $\left(3+\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
f) $\left(\frac{1}{n^2}-4\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
g) $\left(\frac{1}{\pi^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
h) $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
i) $\left(\frac{n^4}{n^7}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
j) $\left(\frac{n^2\times n^{25}}{n^{-7}\times n^{26}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
k) $\left(\mathrm{e}^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
l) $\left(\mathrm{e}^{4n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
m) $\left(\frac{\mathrm{e}^{4n}\times\mathrm{e}^{-5n}}{\mathrm{e}^{-3n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
n) $\left(\frac{\mathrm{e}^{2n}}{\mathrm{e}^{4n}\times\mathrm{e}^{-2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
o) $\left(\frac{\mathrm{e}^{-2n}+\mathrm{e}^{-3n}}{\mathrm{e}^{-2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
p) $\left(\frac{2^n}{3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
q) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
r) $\left(\frac{\mathrm{e}^n}{\pi^n}+2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
s) $\left(\frac{5^n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.