Succession d'épreuves indépendantes.

I Épreuves indépendantes.

On appelle épreuve une expérience aléatoire qui participe d'une expérience aléatoire plus complexe. Par exemple si une expérience consiste à lancer une pièce jusqu'à obtenir un pile, chaque lancé de pièce constitue une épreuve.

On dit que des épreuves sont *indépendantes* si les résultats (issues et probabilités) de l'une ne dépendent pas des résultats (issues et probabilités) de l'autre.

Considérons un exemple : on lance une pièce puis on lance un dé à 6 faces. Une issue est donc un élément de $\Omega = \{P, F\} \times [\![1, 6]\!]$.

Si une expérience est une succession de n épreuves indépendantes d'univers $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ alors son univers est le produit cartésien $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$.

Autrement dit les issues de l'expérience sont des n-listes $(i_1, \ldots, i_n)$ où $i_1, \ldots, i_n$ sont des issues des n épreuves.

II "Principe multiplicatif" sur les épreuves indépendantes.

Si $(i_1, \ldots, i_n)$ est une issue d'une succession de n épreuves indépendantes, alors la probabilité de $(i_1, \ldots, i_n)$ est le produit des probabilités de chacune des issues i_1,...,i_n.

En reprenant l'exemple de la pièce puis du dé : $\mathbb{P}((P, 3)) = \frac{1}{2}\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

III Exercices.

Exercice 1. A

D'après l'INSEE, 65 % des Français âgés de 15 à 25 ans ont réalisé au moins un achat par Internet en 2011. Nous supposerons que cette proportion se maintient encore quelques années après.
Nous interrogeons au hasard deux jeunes dans la tranche d'âge $15 - 25$ ans.

1. Modélisez cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculez la probabilité des événements suivants :
   (a) A : « les deux jeunes interrogés ont effectué au moins un achat sur Internet cette année. »
   (b) B : « Un seul des deux jeunes interrogés a effectué au moins un achat sur Internet cette année. »
   (c) C : « Au plus un des deux jeunes interrogés a effectué au moins un achat sur Internet cette année. »

Exercice 2. A

Amy a acheté un sac de berlingots. D'après l'étiquette du sac, celui-ci contient 40 % de bonbons à la fraise, 30 % au citron et 30 % à la pomme.
Amy prend au hasard deux berlingots. On considère que le nombre de bonbons est suffisamment grand pour assimiler son choix à des tirages successifs avec remise.
Calculez les probabilités des événements suivants :

- E_1 : « Amy a choisi deux berlingots au citron. »
- E_2 : « Amy a choisi un berlingot à la fraise puis un au citron. »
- E_3 : « Amy a choisi un berlingot à la fraise et un au citron. »
- E_4 : « Amy n'a pas choisi de berlingot à la pomme. »
- E_5 : « Amy a choisi des berlingots de parfums différents. »

Exercice 3. A

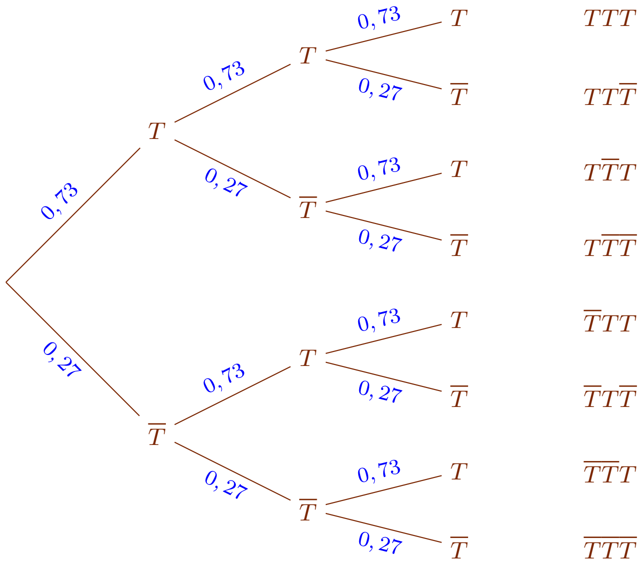
D'après un sondage BVA effectué en octobre 2013 sur un échantillon représentatif de la population, 73 % des Français âgés de 15 à 34 ans préfèrent se coucher tard plutôt que de se lever tôt.
Trois personnes choisies au hasard dans la tranche d'âge $15 - 34$ ans.
Calculez la probabilité des événements suivants :

- A : « Les trois personnes interrogées préfèrent se coucher tard. »
- B : Exactement deux personnes interrogées sur les trois préfèrent se coucher tard. »
- C : « Au moins une des personnes interrogées préfère se coucher tard. »
- D : « Au plus une des personnes interrogées préfère se coucher tard. »
- E : « Moins de deux personnes interrogées préfèrent se coucher tard. »

Correction de l'exercice 3

Construisons l'arbre pondéré correspondant à l'expérience.

Notons T le fait qu'une personne préfère se coucher tard et donc $\overline{T}$ sinon.



1. Calculons $\mathbb{P}(A)$.

   $A = \{TTT\}$.
   Donc

   $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(LLL)$$

   D'après le principe multiplicatif :

   $$= 0,73 \times 0,73 \times 0,73$$

   Finalement :

   $$\boxed{\mathbb{P}(A) \approx 0,389}$$

2. Calculons $\mathbb{P}(B)$.

   $B = \left\{TT\overline{T}; T\overline{T}T; \overline{T}TT\right\}$.
   Donc

   $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(TT\overline{T}) + \mathbb{P}(T\overline{T}T) + \mathbb{P}\mathbb{P}(\overline{T}TT)$$

   D'après le principe multiplicatif :

   $$= 0,73 \times 0,73 \times 0,27 + 0,73 \times 0,27 \times 0,73 + 0,27 \times 0,73 \times 0,73$$

   Finalement :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) \approx 0,1439}$$

3. Calculons $\mathbb{P}(C)$.

   Le nombre de chemins correspondant à l'événement B étant très important il est ici intéressant, mais pas indispensable, de considérer l'événement contraire.

   $\overline{C}$: « Aucune des trois personnes interrogées n'aime se coucher tard. »
   $\overline{C} = \left\{\overline{TTT}\right\}$.
   Donc

   $$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\overline{TTT})$$

   D'après le principe multiplicatif :

   $$= 0,27 \times 0,27 \times 0,27$$

   Nous en déduisons la probabilité de C :

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(C) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{C}) \\ &= 1 - 0,27 \times 0,27 - 0,27 \end{aligned}$$

   Finalement :

   $$\boxed{\mathbb{P}(C) \approx 0,9803}$$

4. Calculons $\mathbb{P}(D)$.

   D : « Aucune ou une seule des trois personnes aime se coucher tard ».

   $D = \left\{T\overline{TT}; \overline{T}T\overline{T}; \overline{TT}T; \overline{TTT}\right\}$.
   Donc

   $$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(T\overline{TT}) + \mathbb{P}(\overline{T}T\overline{T}) + \mathbb{P}(\overline{TT}T) + \mathbb{P}(\overline{TTT})$$

   D'après le principe multiplicatif :

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(D) = {} & 0,73 \times 0,27 \times 0,27 + 0,27 \times 0,73 \times 0,27 + 0,27 \times 0,27 \times 0,73 \\ & + 0,27 \times 0,27 \times 0,27 \end{aligned}$$

   Finalement :

   $$\boxed{\mathbb{P}(D) \approx 0,1793}$$

5. Calculons $\mathbb{P}(E)$.

   Nous remarquons que $E = \overline{A}$.
   Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(\overline{A}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(A) \\ &= 1 - 0,73^3\end{aligned}$$

   D'où

$$\boxed{\mathbb{P}(E) \approx 0,6110}$$

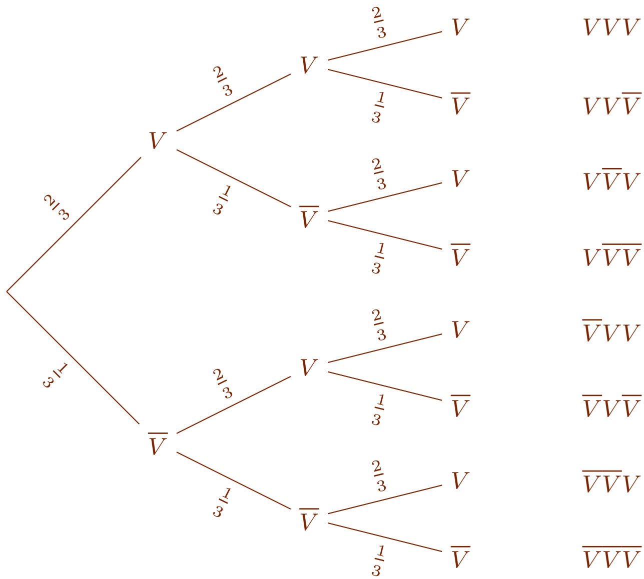
Exercice 4. A

Sur son trajet domicile-travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores, indépendants les uns des autres. Il a remarqué que, statistiquement, chaque feu est au vert une fois sur trois.

1. Représentez la situation par un arbre pondéré.
2. Pour un trajet domicile-travail, calculez la probabilité des événements suivants.
   (a) Deux feux sur les trois sont au vert.
   (b) Un seul feu sur les trois est au vert.
   (c) Tous les feux sont au vert.
   (d) Aucun des trois feux n'est au vert.

Correction de l'exercice 4

1.



2. (a) Notons E_1 l'événement « Deux feux sur les trois sont au vert ».

Calculons $\mathbb{P}(E_1)$.

En lisant les chemins sur l'arbre :
$E_1 = \{VV\overline{V};\ V\overline{V}V;\ \overline{V}VV\}$.
Donc du point de vue probabiliste :

$$\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(VV\overline{)} + \mathbb{P}(V\overline{V}V) + \mathbb{P}(\overline{V}VV)$$

Donc, d'après le principe multiplicatif :

$$\mathbb{P}(E_1) = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E_1) = \frac{4}{9}.}$$

Exercice 5. A

Un restaurateur constate qu'au déjeuner, 9 clients sur 10 prennent un café. Quatre clients se présentent pour déjeuner et commandent de façon indépendante. Pour chacun, nous noterons C l'événement « le client prend un café ».

1. Représentez la situation par un arbre pondéré.
2. Calculez la probabilité des événements suivants.
   (a) Un seul des quatre clients prend un café.
   (b) Au moins deux clients prennent un café.
   (c) Au plus deux clients prennent un café.

Exercice 6. A

Un sac contient des boules indiscernables au toucher : 3 vertes, 4 rouges et 3 bleues. On prélève successivement et avec remise deux boules du sac en notant la couleur de chaque boule.

1. Représentez la situation par un arbre pondéré.
2. Calculez la probabilité de l'événement E_1 :« tirer deux boules bleues ».
3. Calculez la probabilité de l'événement E_2 :« tirer au moins une boule bleue ».
4. Calculez la probabilité de l'événement E_3 :« tirer des boules uniquement rouge ou verte ».

Exercice 7. A

Un magazine est proposé sous deux versions : papier ou numérique.
L'éditeur délègue à une plateforme d'appels de démarcher une liste de clients potentiels.
Le centre d'appel contacte successivement deux personnes sur cette liste.
On considère les événements suivants.

. A : « la personne contactée s'abonne à la version papier »,

. B :« la personne contactée s'abonne à la version numérique »,

. N :« la personne contacté ne s'abonne pas »

Une étude statistique a montré que

. la probabilité qu'une personne s'abonne à la version papier est de $0,18$;

. la probabilité qu'une personne s'abonne à la version numérique est de $0,22$;

. la probabilité qu'une personne ne s'abonne à aucune des deux versions est de $0,7$.

On étudie ce qu'il peut se passer lorsque la plateforme contact deux personnes.
Calculez les probabilité des événements suivants.

1. E_1 :« Les deux personnes contactées ont choisi un abonnement numérique. »
2. E_2 : « au moins l'une des deux personnes a choisi un abonnement numérique »
3. E_3 :« au moins l'une des deux personnes a choisi un abonnement papier »
4. E_4 : « l'une des personnes contactées a choisi un abonnement papier et l'autre un abonnement numérique »
5. E_5 :« au moins l'une des deux personnes s'est abonnée »

Exercice 8. B

Le supermarché Rond-Point organise des ventes promotionnelles "flash". Les clients ont quelques minutes pour profiter des promotions.

Lors d'une de ces ventes un ensemble d'ustensiles de salle de bain composé :

— d'une serviette de bain (**G**rande ou **P**etite),

— d'un gant de toilette (**V**ert, **R**ouge ou **J**aune) et

— d'un rideau de douche (**B**lanc ou **T**ransparent)

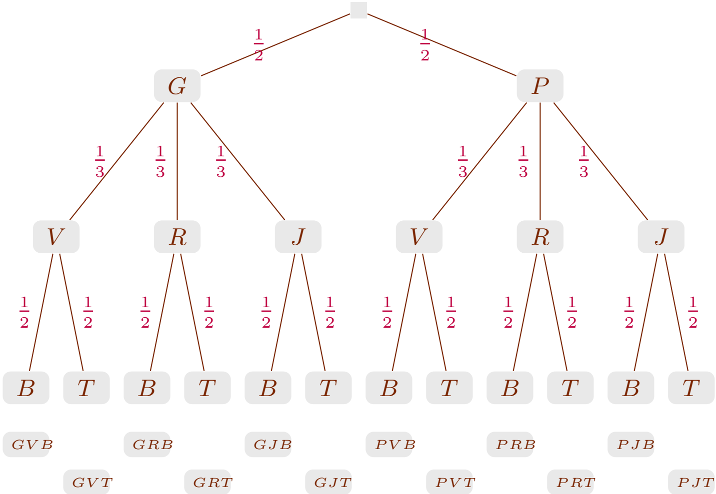
est proposé.

Chaque client prend exactement un gant de toilette, une serviette de bain puis un rideau de douche.

1. Dessinez un arbre rendant compte de cette situation.
2. Inquiet de manquer l'offre promotionnelle, un client prend au hasard un gant de toilette, une serviette de bain puis un rideau de douche. Quelle est la probabilité que ce client prenne une grande serviette (**G**), un gant rouge (**R**) et un rideau blanc (**B**) ?
3. On note A l'événement : « le client prend un gant de toilette jaune ». Énumérer les issues qui réalisent A. En déduire la probabilité de A.
4. Calculer la probabilité qu'un client prenne un gant de toilette **V**ert ou **R**ouge.
5. On note B l'événement « le client prend un rideau de douche blanc ». Énumérer les issues qui réalisent B. En déduire la probabilité de B.
6. Déterminer la probabilité que le client prenne une petite serviette et un rideau de douche blanc.
7. Décrire l'événement $A \cup B$ par une phrase puis calculer la probabilité de $A \cup B$.

Correction de l'exercice 8

1.



2. Le choix du client correspond au chemin (G, R, B). D'après le principe multiplicatif la probabilité de ce chemin est :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G, R, B) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

3. $A = \{(G, J, B), (G, J, T), (P, J, B), (P, J, T)\}$.
   Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(G, J, B) + \mathbb{P}(G, J, T), + \mathbb{P}(P, J, B) + \mathbb{P}(P, J, T) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

4. Notons C l'événement le client prend un gant de toilette vert ou rouge. $\overline{C} = \{(G, J, B), (G, J, T), (P, J, B), (P, JT)\}$. Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{C}) &= 4 \times \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

   On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) \\ &= 1 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

5. $B = \{(G, V, B), (G, R, B), (G, J, B), (P, V, B), (P, R, B), (P, J, B)\}$
   On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= 6 \times \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

6. Notons D l'événement « le client prend une petite serviette et un rideau de douche blanc ». Il y a 3 issues qui réalisent cet événement : $(P, V, B), (P, R, B), (P, J, B)$ donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= 3 \times \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

7. $A \cup B$: « le client prend un gant de toilette jaune ou un rideau de bain blanc ».
   L'événement « le client prend un gant jaune <u>et</u> un gant blanc » est réalisé par (G, J, B) et (R, J, B) donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) &= 2 \times \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

   On en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{4}{6}\end{aligned}$$

Exercice 9. B

Un examen consiste à passer 3 épreuves indépendantes.

- Épreuve 1 : on a 80 % de chances de réussir.
- Épreuve 2 : on a 60 % de chances de réussir.
- Épreuve 3 : on a 25 % de chances de réussir.

On est reçu à l'examen si on réussi au moins deux épreuves sur trois.
Quelle est la probabilité de réussir l'examen ?

Exercice 10.