06 Droites de l'espace.

I Définition.

Définition 1

Soient A et B deux points distincts de l'espace affine $\mathscr{E}_3$.

Nous noterons (AB), et nous appellerons *droite passant par A et B*, l'ensemble de tous les points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ où λ décrit l'ensemble des nombres réels.

II Vecteurs colinéaires.

Définition 2

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* si et seulement si il existe un nombre réel λ (*i.e.* on peut en trouver au moins un) tel que

$$\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$$

C'est une généralisation de la notion de proportionnalité aux vecteurs (et nous verrons que cette proportionnalité se retrouve aussi sur les coordonnées).

Une autre façon de définir la colinéarité et qui se généralise mieux est : il existe (au moins) une combinaison linéaire $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0}$ dont les coefficients λ et μ ne sont pas tous les deux nuls.

Lorsque des vecteurs ne sont pas colinéaires ont dit qu'ils sont *libres* ou *linéairement indépendants*.

III Vecteurs directeurs d'une droite.

On appelle *vecteur directeur de la droite* (AB) le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ou n'importe quel vecteur non nul qui soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Ainsi un vecteur directeur est toujours non nul.

Proposition 1

Des points A, B et C de l'espace sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

IV Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur directeur.

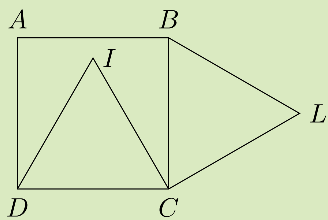
Une droite est entièrement caractérisée par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur. Autrement dit pour parler d'une droite on peut en donner deux points distincts (A et B) ou en donner un point (A) et un vecteur directeur ($\vec{u} \neq \vec{0}$).

Le couple $(A; \vec{u})$ est un *repère* de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

V Exercices.

Exercice 1. A

Soient $ABCD$ un carré, BCL et DIC des triangles équilatéraux tels que sur la figure ci-contre.
Nous souhaitons établir l'alignement des points A, I et L.
Pour cela considérons le repère orthonormé $(D; C; A)$.



1. Donnez sans justification les coordonnées de D, C, A et B.
2. Déterminez les coordonnées de I et L.
3. Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AL}$.
4. Démontrez l'alignement des points A, I et L.

Exercice 2. A

Soient $M(7; 3)$, $N(-3; 1)$, $C(0; 5)$ et $E(3; 9)$ des points du plan.

1. Montrez que le quadrilatère $MNCD$ est un trapèze.
2. Montrez que E est le point d'intersection de (NC) et (MD).
3. Soient J et K les milieux respectivement de $[NM]$ et $[CD]$. Calculez les coordonnées de J et K.
4. Montrez que E, J et K sont alignés.

Exercice 3. A

Soient $A(3;4)$, $B(1;1)$, $C(6;-2)$ et $D(8;1)$ des points, I le milieu de $[BC]$, et E et F les points définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}.$$

1. Calculez les coordonnées de I, E et F.
2. (a) Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont-ils colinéaires ?
   (b) Qu'en déduisez-vous concernant les droites (BE) et (IF) ?
3. Montrez que $ABCD$ est un parallélogramme.
4. (a) Calculez la norme du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   (b) $ABCD$est -il un rectangle ?
5. Les points I, F et D sont-ils alignés ?

Correction de l'exercice 3

1. * Déterminons les coordonnées de I.

   Puisque I est le milieu de $[BC]$:

$$\begin{aligned} x_I &= \frac{x_B + x_C}{2} \\ &= \frac{1+6}{2} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

   De même : $y_I = -\frac{1}{2}$.

$$\boxed{I\left(\tfrac{7}{2}; -\tfrac{1}{2}\right).}$$

   * Déterminons les coordonnées de E.

   $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6-3 \\ -2-4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

   D'où : $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\times 3 \\ \frac{1}{3}\times(-6) \end{pmatrix}$ *i.e.* $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   De même : $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E - 3 \\ y_E - 4 \end{pmatrix}$.

   De $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ nous déduisons donc

$$\begin{cases} x_E - 3 = 1 \\ y_E - 4 = -2 \end{cases}$$

Ce qui équivaut successivement à :

$$\begin{cases} x_E - 3 + 3 = 1 + 3 \\ y_E - 4 + 4 = -2 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_E = 4 \\ y_E = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{E(4;2).}$$

* De même qu'au point précédent

$$\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \iff \begin{cases} x_F - 6 = \frac{1}{3}(3-6) \\ y_F - (-2) = \frac{1}{3}(4-(-2)) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_F = 5 \\ y_F = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{F(5;0).}$$

2. (a) Démontrons que $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{IF}\right) &= \begin{vmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ &= 3 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{3}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BE} \text{ et } \overrightarrow{IF} \text{ sont colinéaires.}}$$

(b) Nous déduisons de la question précédente que :

$$\boxed{(BE) \parallel (IF).}$$

3. Démontrons que $ABCD$ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Par conséquent :

$$\boxed{ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$$

4. (a) Calculons $||\overrightarrow{AC}||$.

La formule pour la distance euclidienne est la même que celle pour la norme du vecteur. Par contre comme le repère n'est pas orthonormé la norme ne correspond pas forcément à une longueur.

$$\begin{aligned}||\overrightarrow{AC}|| &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(6-3)^2 + (-2-4)^2} \\ &= \sqrt{45} \\ &= \sqrt{3^2 \times 5} \\ &= \sqrt{3^2} \times \sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\boxed{||\overrightarrow{AC}|| = 3\sqrt{5}.}$$

(b) Nous ne pouvons pas répondre à cette question car le repère n'étant a priori pas orthonormé nous ne pouvons pas établir la présence d'angle droit ou d'égalité de longueur (diagonales).

Si nous supposons que le repère est orthonormé alors, comme $||\overrightarrow{BD}|| = 9$, nous pouvons affirmer que les diagonales du parallélogramme $ABCD$ ne sont pas de même longueur donc ce n'est pas un rectangle.

5. Démontrons que les points I, F et D sont alignés.

Ils sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires.

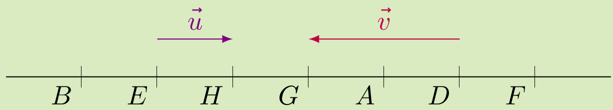
$\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-3\\ -1\end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{IF};\overrightarrow{DF}\right) &= \begin{vmatrix}\frac{3}{2} & -3\\ \frac{1}{2} & -1\end{vmatrix} \\ &= \frac{3}{2}\times(-1) - \frac{1}{2}\times(-3) \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires.
Et par conséquent

$$\boxed{I,\ F \text{ et } D \text{ sont alignés.}}$$

Exercice 4. A



Donnez sans justification

a) La coordonnée de B dans le repère $(A; \vec{u})$.

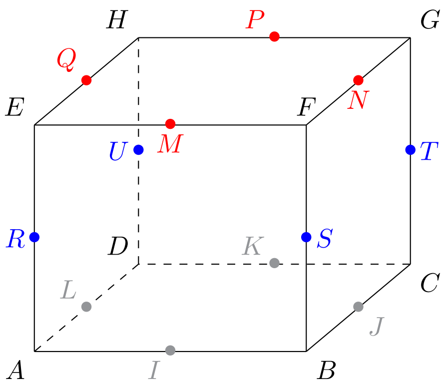
b) La coordonnée de H dans le repère $(B; \vec{v})$.

c) La coordonnée de G dans le repère $(D; 2\vec{u})$.

d) La coordonnée de E dans le repère $(F; 2\vec{v})$.

e) La coordonnée de A dans le repère $(D; 2\vec{v})$.

Dans les exercices lorsqu'on parle d'un parallélépipède rectangle, ou un cube, $ABCDEFGH$ vous raisonnerez sur la figure suivante. Les autres points sont les milieux des arêtes.



Exercice 5. B

On considère un pavé droit $ABCDEFGH$.
Dans chaque cas décrivez par deux points la droite dont on donne un point et un vecteur directeur. Exemple : la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AL}$ est la droite (AL).

a) La droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{DC}$.

b) La droite passant par H et de vecteur directeur $\overrightarrow{TJ}$.

c) La droite passant par M et de vecteur directeur $\overrightarrow{UD}$.

d) La droite passant par K et de vecteur directeur $\overrightarrow{BE}$.

e) La droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AE}$.

f) La droite passant par B et de vecteur directeur $\overrightarrow{HM} + \overrightarrow{HD}$.

g) La droite passant par S et de vecteur directeur $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GH}$.

h) La droite passant par G et de vecteur directeur $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{TC}$.

i) La droite passant par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{KU} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KP}$.

j) La droite passant par G et de vecteur directeur $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KJ}$.

k) La droite passant par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CG}$.

l) La droite passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{UD} + \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{BS}$.

Exercice 6. B