05 Suites : limites infinies.

I Majorants et minorants.

Définition 1

Soient :

. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle,

. M et m deux réels.

Nous dirons que

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée* par M si, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$;

(ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *minorée* par m si, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n$;

(iii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques.

1. Un majorant n'est pas un maximum. Pas plus qu'un minorant n'est un minimum.

   Cependant un maximum est un majorant et un minimum un minorant.
2. Ainsi une suite est bornée s'il est possible de trouver des nombres m et M tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$.
3. Trouver un minorant et un majorant pour une suite c'est limiter les possibilités de valeurs des termes de la suite. Dans de nombreux cas il faut se contenter de cela.

Exemples.

1. Par une étude de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ on obtient aisément : $0 < \frac{1}{x} \leqslant 1$.

   Donc $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0, -1, $-234,5$ et majorée par 1, 3, $20\,000$. Donc elle est bornée.

   Remarquons également que cette suite a un maximum mais pas de minimum.
2. $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées puisque nous savons que les fonctions sinus et cosinus sont, par construction, bornées par -1 et 1.
3. La suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ est bornée : $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous pouvons le conjecturer d'après la calculatrice ou graphiquement.

II Définition des limites infinies.

Définition 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

Nous dirons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet pour limite* $+\infty$ si et seulement si : quelque soit $A \in \mathbb{R}$, $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Remarques.

1. Quelque soit le majorant A supposé de la suite, on se rend compte qu'il n'y a qu'un nombre fini de termes qui soient plus petits.
2. Nous avons également la définition en $-\infty$.
   Nous dirons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet pour limite* $-\infty$ si et seulement si : quelque soit $A \in \mathbb{R}$, $]-\infty, A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Exemples.

1. Démontrons que la suite définie par $u_n = n$ tend vers $+\infty$.

   Soit $A \in \mathbb{R}$.
   Notons $N = \lfloor A \rfloor + 1$.
   Si $n \geqslant N$ alors

$$\begin{aligned} n &\geqslant \lfloor A \rfloor + 1 \\ &> A \end{aligned}$$

   Autrement dit $n \in]A;+\infty[$.
   À partir du rang N tous les termes de la suite sont dans $]A,+\infty[$.

   Quelque soit le réel A l'intervalle $]A,+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
   Autrement dit :

$$\boxed{(n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } +\infty.}$$

2. La suite arithmétique définie par $u_n = 2n - 3$ tend vers $+\infty$.
3. La suite arithmétique définie par $u_n = -3n - 5$ tend vers $-\infty$.

III Une condition nécessaire.

Proposition 1

(i) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors (u_n) n'est pas majorée.

(ii) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors (u_n) n'est pas minorée.

IV Une condition suffisante.

Proposition 2 - Limite et monotonie.

(i) Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

(ii) Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

V Des suites de référence.

Proposition 3 - Suites puissances.

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty.$$

Proposition 4 - Suite racine carrée.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

Proposition 5 - Suite exponentielle.

Si $q > 1$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{q}^n = +\infty.$$

En particulier :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty.$$

VI Exercices.

Exercice 1. A

Déterminez ou conjecturez l'éventuelle limite infinie de (u_n) dans les cas suivants (vous pourrez utiliser votre calculatrice).

a) $u_n = \frac{1}{n} + \sqrt{n}$.

b) $u_n = n^4$.

c) $u_n = 4^n$.

d) $u_n = 0,25^n$.

e) $u_n = \left(-\frac{1}{10}\right)^n$.

f) $u_n = (-3)^n$.

g) $u_n = -5n^3 + 4n^2 + n - 4$.

h) $u_n = n^6 - 4n^5 - 1000$.

i) $u_n = -\sqrt{\frac{1}{n^2}}$.

j) $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^n}{n^3}$.

k) $u_n = \dfrac{4n^2 - 3n + 1}{-2n^2 + n - 5}$.

l) $u_n = \dfrac{7n^2 + n + 1}{5n^6 + n^3}$.

m) $u_n = \mathrm{e}^{n^2}$.

n) $u_n = \mathrm{e}^{-n^2}$.

o) $u_n = (-1)^n$.

p) $u_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

q) $u_n = \sin(n\pi) + n^2$.

Correction de l'exercice 1

a) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

d) Pas de limite infinie, suite bornée.

e) Suite bornée.

f) Pas de limite infini.

g) $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

h) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

i) Suite bornée.

j) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

k) Suite bornée.

l) Suite bornée.

m) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

n) Suite bornée.

o) Suite bornée.

p) Suite bornée.

q) Suite bornée.

Exercice 2. A

Déterminez ou conjecturez l'éventuelle limite infinie de (u_n) dans les cas suivants (vous pourrez utiliser votre calculatrice).

a) $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2$.

b) $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n$.

c) $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{5}{3}u_n$.

d) $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n$.

e) $u_0 = 4$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

f) $u_0 = -12$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

g) $u_0 = -3$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{7}{4}u_n - 1$.

h) $u_0 = 6$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{7}{4}u_n - 1$.

Correction de l'exercice 2

a) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) Suite bornée.

c) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

d) Pas de limite infinie et pas bornée.

e) Bornée.

f) Bornée.

g) $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

h) $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 3. C

Déterminez si chacune des suites proposée est minorée, majorée ou bornée.

a) $u_n = \dfrac{n+3}{2n+1}$;

b) $u_n = \dfrac{n-1}{2n-3}$;

c) $u_n = \dfrac{n+1}{n}$;

d) $u_n = (-1)^n \times \dfrac{n^2}{n+1}$;

e) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$;

f) $u_n = \pi^n - 3^n$;

g) $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - 2n$;

h) $u_n = \dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$;

i) $u_n = \sin\left(2^n \times \pi\right)$.

Correction de l'exercice 3

Dans tous les cas il faut calculer les premiers termes pour émettre une conjecture.

Avec une formule explicite il est parfois possible de deviner l'allure de la courbe représentative sans faire d'étude approfondie.

a) Clairement minorée par 0. (u_n) décroissante et $u_0 = 3$ donc majorée par 3.

b)

* En utilisant la forme canonique de l'homographie : $u_n = \frac{\frac{1}{2}(2n-3)}{2n-3} + \frac{\frac{3}{2}-1}{2n-3} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{n-\frac{3}{2}}$

  Le tableau de variation de $f : x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{3}}{x-\frac{3}{2}}$ est :

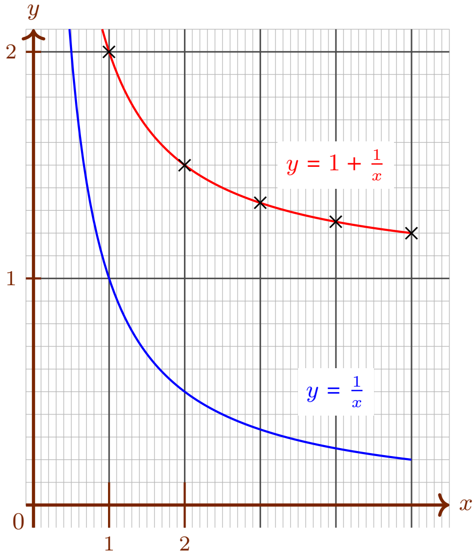
x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
f	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

  Nous voyons qui faut tenir compte de ce qui se passe avant $\frac{3}{2}$ et après $\frac{3}{2}$.

  Donc u_n est inférieur ou égale au maximum de $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_2 = 1$. Ainsi (u_n) admet un majorant égale à 1 qui est aussi un maximum.

* Si $n \geqslant 2$, clairement $u_n \geqslant 0$. Comme de plus $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_1 = 0$ nous pouvons conclure (u_n) admet un minorant égale à 0 qui est atteint c'est donc in minimum.

c) Là encore utilisons la forme canonique de l'homographie : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.



(u_n) admet un maximum égale à 2 car décroissante et est minorée (apparemment par 1) mais clairement par 0.

d) Nous ne pouvons pas pour l'instant l'établir mais cette suite n'est pas bornée les termes de rangs pairs prennent des valeurs infiniment grandes et ceux de rangs impairs infiniment petites.

e)

* $\sqrt{n^2+1}-n = \sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2}$ et puisque la fonction racine carrée est croissante : $\sqrt{n^2+1}-n \geqslant 0$. Autrement dit (u_n) est minorée par 0.
* En utilisant l'astuce de la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Clairement (u_n) est décroissante (puisque racine carré est croissante) donc (u_n) est décroissante.

(u_n) admet un maximum qui est $u_0 = 1$.

f)

* $u_n \geqslant 0$ car les fonctions puissances sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$ et $\pi \geqslant 3$.
* (u_n) n'est pas majorée.

g) (u_n) est majorée par 1 qui est d'ailleurs unmmaximum. En effet :

$$\begin{aligned} n^2 + n + 1 &\leqslant n^2 + 2n + 1 \\ \sqrt{n^2+n+1} &\leqslant \sqrt{(n+1)^2} \\ \sqrt{n^2+n+1} - 2n &\leqslant n + 1 - 2n \\ \sqrt{n^2+n+1} - 2n &\leqslant -n + 1 \end{aligned}$$

Nous en déduisons également que (u_n) ne sera pas minorée.

h) Bornée par -1 et 1 du fait du sinus.

i) Bornée par -1 et 1 du fait du sinus.

Exercice 4. C

Démontrez que les suites suivantes sont bornées.

a) $u_n = 10 - 2\sin\left(\frac{1}{n}\right)$;

b) $u_n = \frac{n}{n+2}$;

c) $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \geqslant 1$;

d) $u_n = 1 + \frac{2}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{7}\right)^n$;

e) $u_n = 25 + 5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}$;

f) $u_n = 9 + 3 + 1 + \cdots + 3^{-n+2}$.

Correction de l'exercice 4

a) Puisque $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$10 - 2 \times 1 \leqslant 10 - 2\sin\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant 10 - 2 \times 1.$$

Donc

$$8 \leqslant u_n \leqslant 12.$$

b) $0 \leqslant u_n$ et, comme $n < n+2$, $\frac{n}{n+2} < 1$ donc

$$0 \leqslant u_n < 1.$$

c)

d) Clairement $v_n \geqslant 0$.

En notant $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{2}{7}v_n$, nous remarquons que $u_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Autrement dit c'est la somme des termes d'une suite géométrique.

Donc

$$\begin{aligned} u_n &= 1 \times \frac{1-\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{7}} \\ &= \frac{7}{5}\left[1-\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}\right] \end{aligned}$$

De $0 \leqslant \left(\frac{2}{7}\right)^n \leqslant \frac{2}{7}$, nous déduisons : $1 \geqslant 1-\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} \geqslant 0$.

e) Comme la précédente question.

f) Comme la précédente question.

Exercice 5. D

Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \frac{2}{7}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}$.

1. On considère le programme suivant où M est un nombre dans $\left]0; \frac{3}{4}\right[$.

```
def programme(M):
n=0
u=2/7
while u<M:
n=n+1
u=1/3*u+1/2
return(n)
```

Quel est l'intérêt de cet algorithme ?

2. Testez ce programme avec différentes valeurs de M, de plus en plus proche de $\frac{3}{4}$. Que remarquez-vous ?

3. Complétez la conjecture suivante : « $\frac{3}{4}$ semble le plus ... des majorants de la suite (u_n) ».

4. Montrez que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{3}{4} - u_n = \frac{13}{28 \times 3^n}.$$

5. Pourquoi la conjecture précédente est-elle vraie ?

Exercice 6. D

Démontrez à partir de la définition les limites suivantes.

a) $\left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

b) $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.