

## 05 Suites : limites infinies.

### I Majorants et minorants.

#### Définition 1

Soient :

- .  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle,
- .  $M$  et  $m$  deux réels.

Nous dirons que

- (i)  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *majorée* par  $M$  si, quelque soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq M$ ;
- (ii)  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *minorée* par  $m$  si, quelque soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq u_n$ ;
- (iii)  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

#### Remarques.

1. Un majorant n'est pas un maximum. Pas plus qu'un minorant n'est un minimum.  
Cependant un maximum est un majorant et un minimum un minorant.
2. Ainsi une suite est bornée s'il est possible de trouver des nombres  $m$  et  $M$  tels que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq u_n \leq M$ .
3. Trouver un minorant et un majorant pour une suite c'est limiter les possibilités de valeurs des termes de la suite. Dans de nombreux cas il faut se contenter de cela.

#### Exemples.

1. Par une étude de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  on obtient aisément :  $0 < \frac{1}{x} \leq 1$ .  
Donc  $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est minorée par 0, -1, -234,5 et majorée par 1, 3, 20 000.  
Donc elle est bornée.  
Remarquons également que cette suite a un maximum mais pas de minimum.
2.  $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$  sont bornées puisque nous savons que les fonctions sinus et cosinus sont, par construction, bornées par -1 et 1.
3. La suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$  est bornée :  $0 \leq u_n \leq 2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Nous pouvons le conjecturer d'après la calculatrice ou graphiquement.

## II Définition des limites infinies.

### Définition 2

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels.

Nous dirons que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *admet pour limite  $+\infty$*  si et seulement si : quelque soit  $A \in \mathbb{R}$ ,  $]A; +\infty[$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

### Remarques.

1. Quelque soit le majorant  $A$  supposé de la suite, on se rend compte qu'il n'y a qu'un nombre fini de termes qui soient plus petits.
2. Nous avons également la définition en  $-\infty$ .

Nous dirons que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *admet pour limite  $-\infty$*  si et seulement si : quelque soit  $A \in \mathbb{R}$ ,  $] -\infty, A[$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

### Exemples.

1. Démontrons que la suite définie par  $u_n = n$  tend vers  $+\infty$ .

Soit  $A \in \mathbb{R}$ .

Notons  $N = \lfloor A \rfloor + 1$ .

Si  $n \geq N$  alors

$$\begin{aligned} n &\geq \lfloor A \rfloor + 1 \\ &> A \end{aligned}$$

Autrement dit  $n \in ]A; +\infty[$ .

À partir du rang  $N$  tous les termes de la suite sont dans  $]A; +\infty[$ .

Quelque soit le réel  $A$  l'intervalle  $]A; +\infty[$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Autrement dit :

$$(n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } +\infty.$$

2. La suite arithmétique définie par  $u_n = 2n - 3$  tend vers  $+\infty$ .
3. La suite arithmétique définie par  $u_n = -3n - 5$  tend vers  $-\infty$ .

### III Une condition nécessaire.

#### Proposition 1

- (i) Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  alors  $(u_n)$  n'est pas majorée.
- (ii) Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  alors  $(u_n)$  n'est pas minorée.

### IV Une condition suffisante.

#### Proposition 2 - Limite et monotonie.

- (i) Toute suite croissante et non majorée tend vers  $+\infty$ .
- (ii) Toute suite décroissante et non minorée tend vers  $-\infty$ .

### V Des suites de référence.

#### Proposition 3 - Suites puissances.

Soit  $\alpha \in \mathbb{N}^*$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty.$$

#### Proposition 4 - Suite racine carrée.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

#### Proposition 5 - Suite exponentielle.

Si  $q > 1$  alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty.$$

En particulier :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty.$$

## VI Exercices.

### Exercice 1. A

Déterminez ou conjecturez l'éventuelle limite infinie de  $(u_n)$  dans les cas suivants (vous pourrez utiliser votre calculatrice).

a)  $u_n = \frac{1}{n} + \sqrt{n}$ .

b)  $u_n = n^4$ .

c)  $u_n = 4^n$ .

d)  $u_n = 0,25^n$ .

e)  $u_n = \left(-\frac{1}{10}\right)^n$ .

f)  $u_n = (-3)^n$ .

g)  $u_n = -5n^3 + 4n^2 + n - 4$ .

h)  $u_n = n^6 - 4n^5 - 1000$ .

i)  $u_n = -\sqrt{\frac{1}{n^2}}$ .

j)  $u_n = \frac{e^n}{n^3}$ .

k)  $u_n = \frac{4n^2 - 3n + 1}{-2n^2 + n - 5}$ .

l)  $u_n = \frac{7n^2 + n + 1}{5n^6 + n^3}$ .

m)  $u_n = e^{n^2}$ .

n)  $u_n = e^{-n^2}$ .

o)  $u_n = (-1)^n$ .

p)  $u_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ .

q)  $u_n = \sin(n\pi) + n^2$ .

### Exercice 2. A

Déterminez ou conjecturez l'éventuelle limite infinie de  $(u_n)$  dans les cas suivants (vous pourrez utiliser votre calculatrice).

a)  $u_0 = 1$  et :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2$ .

b)  $u_0 = 3$  et :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n$ .

c)  $u_1 = 1$  et :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{5}{3}u_n$ .

d)  $u_1 = 1$  et :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -2u_n$ .

e)  $u_0 = 4$  et :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ .

f)  $u_0 = -12$  et :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ .

g)  $u_0 = -3$  et :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{7}{4}u_n - 1$ .

h)  $u_0 = 6$  et :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{7}{4}u_n - 1$ .

## Exercice 3. C

Déterminez si chacune des suites proposée est minorée, majorée ou bornée.

a)  $u_n = \frac{n+3}{2n+1}$ ;

b)  $u_n = \frac{n-1}{2n-3}$ ;

c)  $u_n = \frac{n+1}{n}$ ;

d)  $u_n = (-1)^n \times \frac{n^2}{n+1}$ ;

e)  $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$ ;

f)  $u_n = \pi^n - 3^n$ ;

g)  $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - 2n$ ;

h)  $u_n = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ;

i)  $u_n = \sin(2^n \times \pi)$ .

## Exercice 4. C

Démontrez que les suites suivantes sont bornées.

a)  $u_n = 10 - 2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ ;

b)  $u_n = \frac{n}{n+2}$ ;

c)  $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$  pour  $n \geq 1$ ;

d)  $u_n = 1 + \frac{2}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{7}\right)^n$ ;

e)  $u_n = 25 + 5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}$ ;

f)  $u_n = 9 + 3 + 1 + \dots + 3^{-n+2}$ .

## Exercice 5. D

Considérons la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = \frac{2}{7}$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}$ .

1. On considère le programme suivant où  $M$  est un nombre dans  $]0; \frac{3}{4}[$ .

```
def programme(M):
    n=0
    u=2/7
    while u<M:
        n=n+1
        u=1/3*u+1/2
    return(n)
```

Quel est l'intérêt de cet algorithme ?

2. Testez ce programme avec différentes valeurs de  $M$ , de plus en plus proche de  $\frac{3}{4}$ . Que remarquez-vous ?
3. Complétez la conjecture suivante : «  $\frac{3}{4}$  semble le plus ... des majorants de la suite  $(u_n)$  ».
4. Montrez que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$\frac{3}{4} - u_n = \frac{13}{28 \times 3^n}.$$

5. Pourquoi la conjecture précédente est-elle vraie ?

## Exercice 6. D

Démontrez à partir de la définition les limites suivantes.

- a)  $(n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$  tend vers  $+\infty$ .                      b)  $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  tend vers  $+\infty$ .

