Principes additif et multiplicatif.

Nous ne considérerons que des ensembles contenant un nombre fini d'éléments.

I Principe additif.

Le nombre d'éléments contenus dans un ensemble A est noté $|A|$ et est appelé le *cardinal de A*.

Si A et B sont disjoints (intersection vide, pas d'élément en commun) alors $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Nous retrouvons des résultats semblables à ceux des probabilités (formule du crible).

Par exemple, si $A = \{2;6\}$ et $B = \{1;-3;4\}$ alors, $|A| = 2$ et $|B| = 3$, et puisqu'ils sont disjoints, $|A \cup B| = 2 + 3 = 5$.

II Produit cartésien d'ensembles.

On appelle couple la donnée de deux éléments dans un ordre fixe comme par exemple des coordonnées. Ainsi $(2;3)$ est un couple qui est différent du couple $(3;2)$.

Si E et F sont deux ensembles alors l'ensemble des couples formés d'un élément de E puis d'un élément de F est appelé le *produit cartésien* de E et F et est noté $E \times F$.

Par exemple, $(2;5)$ et $(3;a)$ sont des éléments du produit cartésien $\{2;5;7\} \times \{3;a\}$ alors que $(3;a)$, $(3;7)$ et $(1;13)$ n'en sont pas.

On généralise la notion de couple à plus de deux éléments sous le nom de *k-liste* ou de *k-uplet*, k désignant un entier naturel non nul. Ainsi $(-2;4;7)$ est une 3-liste qui appartient au produit cartésien $]-4;-1] \times \mathbb{R} \times [5;10]$.

Lorsqu'on regarde les couples de nombres réels on travail dans le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et dans ce cas on simplifie la notation (en cohérence avec nos habitudes) en écrivant $\mathbb{R}^2$. On peut de même écrire $\mathbb{R}^3$ ou $[0;1]^5$ ou $\{0;1\}^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

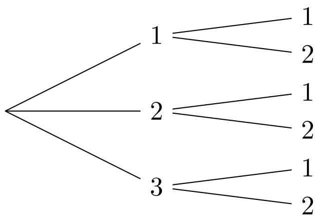
III Principe multiplicatif.

Une notation à connaître : l'ensemble des entiers compris (au sens large) entre deux entiers a et b avec $a \leqslant b$ est noté $[\![a, b]\!]$. Par exemple $[\![-2, 1]\!] = \{-2, -1, 0, 1\}$.

Nous souhaitons connaître le nombre de couples que contient un produit cartésien $E \times F$, E et F étant des ensembles finis.

Conjecturons la réponse à partir d'un exemple : $E = [\![1, 3]\!]$ et $F = [\![1, 2]\!]$. Pour fabriquer un couple de $E \times F$ il faut d'abord choisir un nombre das $E = [\![1, 3]\!]$

puis un nombre dans $F = [\![1, 2]\!]$. Le fait de choisir fait penser aux probabilités. Représentons tous les choix possibles par un arbre.



Chaque branche du premier niveau conduit à deux nouvelles branches donc il y a $3 \times 2 = 6$ chemins, et donc 6 couples possibles. C'est le principe multiplicatif.

Nous noterons $|E|$ le cardinal de E (la taille de E).

Proposition 1 - Principe multiplicatif.

Soient E et F des ensembles de cardinaux finis.

$$|E \times F| = |E| \times |F|.$$

IV Vocabulaire ensembliste.

Un ensemble est une collection d'objets distincts deux à deux. On dit qu'on définit un ensemble en extension lorsqu'on en énumère les issues. Par exemple $\{0; 1; 2\}$ et $\{0; 1; 2; \ldots\}$ sont donnés en extension.

Une *partie* F, ou *sous-ensemble*, d'un ensemble E est un ensemble dont tous les éléments sont aussi dans E. On écrit $F \subset E$.

V Exercices.

Exercice 1. B

Soient $A = \{u; w\}$ et $B = \{0; 1\}$.
Donnez une définition en extension de $A \times B$ puis de $B \times A$.

Exercice 2. B

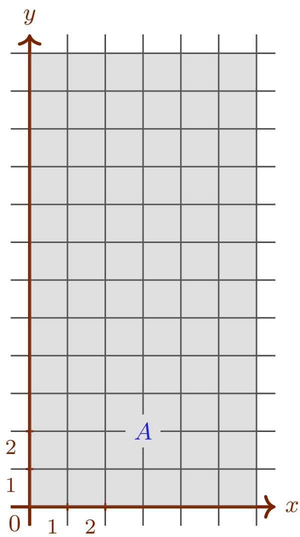
1. Dessinez l'ensemble A des points M du plan dont les coordonnées (x, y) dans un repère vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 6 \\ 0 \leqslant y \leqslant 12 \end{cases}$$

2. Exprimez A comme un produit cartésien de deux ensembles.
3. Notons B le sous-ensemble des éléments de A à coordonnées entières. Exprimez B comme un produit cartésien de deux ensembles puis donnez en le cardinal.

Correction de l'exercice 2

1.



2. $A = [0; 6] \times [0; 12]$.
3. $B = [\![0, 6]\!] \times [\![0; 12]\!]$.
   D'après le principe multiplicatif : $|B| = |[\![0, 6]\!]| \times |[\![0; 12]\!]| = 7 \times 13 = 91$.

Exercice 3. B

Dans un restaurant le menu propose au choix deux plats et trois desserts.
Combien de menus différents peut-on composer ?

Correction de l'exercice 3

$2 \times 3 = 6$.

Exercice 4. B

Représentez l'ensemble des 3-listes d'éléments de l'ensemble $[\![1,4]\!]$.

Correction de l'exercice 4

$[\![1,4]\!]^3$.

Exercice 5. B

Le digicode d'un immeuble est composé des cinq chiffres de 0 à 4 et des lettres A, B et C.

1. Combien de codes à quatre caractères peut-on composer ?
2. Combien de codes à trois chiffres suivis d'une lettre peut-on composer ?

Correction de l'exercice 5

1. $|\{0;1;2.3;4;A;B;C\}^4| = |\{0;1;2.3;4;A;B;C\}|^4 = 8^4$.
2. $|\{[\![0,4]\!]^3 \times \{A,B,C\}| = |\{[\![0,4]\!]|^3 \times |\{A,B,C\}| = 5^3 \times 3$.

Exercice 6. C

1. Combien de 2-listes d'éléments pris $\{0;1\}$ peut-on composer ?
2. Recommencez pour les 3-listes, les 4-listes, les 5-listes.
3. Conjecturez le nombre de n-listes d'éléments pris dans $\{0;1\}$.

Correction de l'exercice 6

L'ensemble des n-listes d'éléments de $\{0;1\}$ est $\{0;1\}^n$ et son cardinal est 2^n.

Exercice 7. C

Combien de mots de $n \in \mathbb{N}$ lettres peut-on formé avec les lettres A et B ?

Correction de l'exercice 7

2^N.

Exercice 8. C

On considère une expérience aléatoire consistant à lancer 8 fois une pièce et à regarder si on obtient pile ou face.
Combien d'issues contient cette expérience ?

Correction de l'exercice 8

2^8.

Exercice 9. D

Déterminez le nombre de sous-ensembles d'un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 9

Il y a 2^n sous-ensembles.