Calculs de probabilités.

I Modéliser une expérience par une succession d'épreuves.

Un lancer de deux dés à six faces peut être schématisé par un tableau à double entrée ou, en considérant qu'il s'agit de deux lancers successifs de dés, par un arbre avec deux niveaux.
Chacun des lancers constitue une expérience aléatoire en elle-même.

Lorsqu'une expérience est constituée de plusieurs épreuves nous la schématiserons par un arbre avec autant de niveaux.

II Probabilité conditionnelle.

Par définition, si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ alors :

$$\mathbb{P}_A(B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A).}$$

$\mathbb{P}_A(B)$ est la *probabilité de B sachant A*.

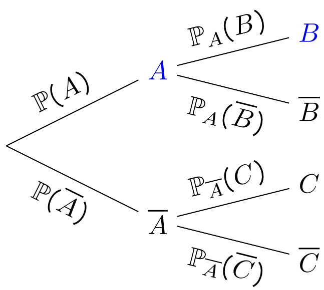
III Événements indépendants.

Deux événements A et B sont dits *indépendants* si et seulement si

$$\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B).$$

IV Calcul de la probabilité d'une issue, d'un chemin.

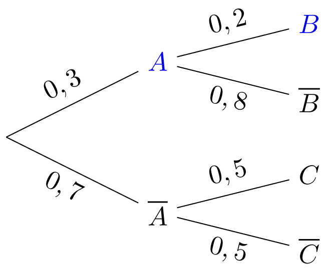
Lorsqu'une expérience est constituée de deux épreuves, que la première réalise l'événement A ou pas et la seconde l'événement B ou pas on schématise la situation par l'arbre :



L'événement obtenir A et B est schématisé par le chemin passant par A puis B et on le note $A \cap B$.
La formule des probabilités composées permet d'affirmer que :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B).$$

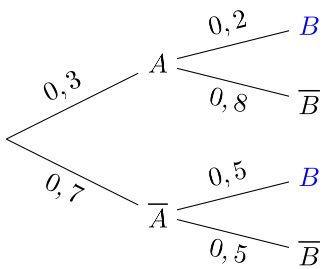
Par exemple



Donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,3 \times 0,2 = 0,06$.

V Formule des probabilités totales.

Par exemple

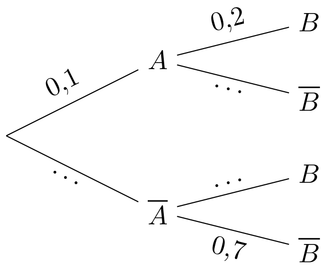


Alors $\mathbb{P}(B) = 0,3 \times 0,2 + 0,7 \times 0,5 = 0,41$.

VI Et d'autres encore...

Rappelons certains incontournables : $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Lorsqu'il y a plusieurs épreuves chacune étant une expérience, la somme des probabilités sur un embranchement est de 1.
Par exemple :



alors : $\mathbb{P}(\overline{A}) = 0,9$, $\mathbb{P}_A(\overline{B}) = 0,8$ et $\mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = 0,3$.

La formule du crible de Poincaré :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

VII Exercices.

Exercice 1. A

Une chaîne de salons de coiffure propose à ses 5 000 clients qui viennent pour une coupe deux prestations supplémentaires cumulables :

— une coloration naturelle à base de plantes appelée « couleur-soin »,

— des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, appelées « effet coup de soleil ».

Il apparaît que 2 000 clients demandent une « couleur-soin ». Parmi ceux qui ne veulent pas de « couleur soin », 900 demandent un « effet coup de soleil ». Par ailleurs, 650 clients demandent une « couleur soin » et un « effet coup de soleil ».
On notera C l'évènement « le client souhaite une « couleur-soin ».
On notera E l'évènement « le client souhaite un « effet coup de soleil ».

1. Recopier sur votre copie et compléter le tableau suivant :

	C	$\overline{C}$	Total
E		900	
$\overline{E}$			
Total			5 000

2. On interroge un client au hasard parmi les 5 000 clients.
   Quelle est la probabilité qu'il ait choisi les deux prestations : « couleur soin » et « effet coup de soleil » ?

Correction de l'exercice 1

1. Recopier sur votre copie et compléter le tableau suivant :

	C	$\overline{C}$	Total
E	650	900	1 550
$\overline{E}$	1 350	1 100	2 450
Total	2 000	3 000	5 000

2. Calculons $\mathbb{P}(E \cap C)$.

   L'univers est constitué des 5 000 clients muni de la probabilité uniforme.
   De plus $E \cap C$ est réalisé par 650 issues donc

$$\mathbb{P}(E \cap C) = \frac{650}{5000}.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E \cap C) = \frac{13}{100}.}$$

Exercice 2. A

Un jeu consiste à combattre en duel soit un monstre A, soit un monstre B.
On a une probabilité de $\frac{4}{5}$ d'affronter le monstre A.
Le joueur gagne contre le monstre A dans 30 % des cas, et gagne contre le monstre B dans 25 % des cas.
Le joueur lance une partie. On considère les évènements :

— A : « Le joueur affronte le monstre A. »
— B : « Le joueur affronte le monstre B. »
— V : « Le joueur est victorieux. »

Déterminer $p_B\left(\overline{V}\right)$ et interpréter le résultat.

Correction de l'exercice 2

La probabilité que le joueur perde sachant qu'il affronte le monstre B est $p_B\left(\overline{V}\right) 1 - 0,25 = 0,75$.

Exercice 3. A

Un restaurant propose à sa carte deux desserts différents :

— le premier dessert est un assortiment de macarons, et est choisi par 40 % des clients,

— le second dessert est une part de tarte, et est choisie par 30 % des clients.

Les autres clients ne prennent pas de dessert. Aucun client ne prend plusieurs desserts.

Le restaurateur a remarqué que parmi les clients ayant pris comme dessert un assortiment de macarons, 70 % prennent un café, que parmi les clients ayant pris comme dessert une part de tarte 40 % prennent un café et, que parmi les clients n'ayant pas pris de dessert 90 % prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant. On note :

* M l'évènement : « Le client prend un assortiment de macarons. »
* T l'évènement : « Le client prend une part de tarte. »
* N l'évènement : « Le client ne prend pas de dessert. »
* C l'évènement : « Le client prend un café. »

Calculer $P(T \cap C)$.

Correction de l'exercice 3

Calculons $\mathbb{P}(T \cap C)$.

Puisque $\mathbb{P}(T) = 0,3 > 0$ donc, d'après la formule des probabilité composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T \cap C) &= \mathbb{P}(T) \times \mathbb{P}_T(C)\\ &= 0,3 \times 0,4\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(T \cap C) = 0,12.}$$

Exercice 4. A

Une entreprise récupère des smartphones endommagés, les répare et les reconditionne afin de les revendre à prix réduit.

— 45 % des smartphones qu'elle récupère ont un écran cassé ;
— parmi les smartphones ayant un écran cassé, 30 % ont également une batterie défectueuse ;
— par contre, seulement 20 % des smartphones ayant un écran non cassé ont une batterie défectueuse.

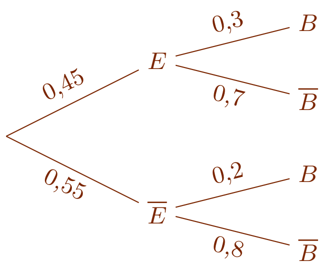
Un technicien chargé de réparer et reconditionner les smartphones de l'entreprise prend un smartphone au hasard dans le stock. On note :

— E l'évènement : « Le smartphone choisi a un écran cassé ».
— B l'évènement : « Le smartphone choisi a une batterie défectueuse ».

1. Représenter la situation décrite ci-dessus par un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité que le smartphone choisi ait une batterie défectueuse est égale à $0,245$.

Correction de l'exercice 4

1.



2. Calculons $\mathbb{P}(B)$.

$\{E, \overline{E}\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(E \cap B) + \mathbb{P}(\overline{E} \cap B)$$

$\mathbb{P}(E) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{E}) \neq 0$ donc, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}_E(B) + \mathbb{P}(\overline{E}) \times \mathbb{P}_{\overline{E}}(B)\\ &= 0,45 \times 0,3 + 0,55 \times 0,2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = 0,245.}$$

Exercice 5. A

Une résidence de vacances propose uniquement deux formules :

— la formule « pension complète » dans laquelle 3 repas par jour sont fournis ;

— la formule « demi-pension » dans laquelle sont fournis uniquement le petit déjeuner et le dîner.

Pour l'année 2018, 65 % des clients ont choisi la pension complète ; les autres ont choisi la formule « demi-pension ».

Parmi les clients qui ont choisi la demi-pension, 30 % ont réservé l'option « ménage » en fin de semaine.

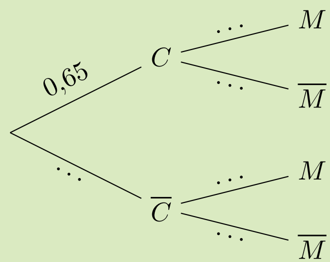
De plus, 70 % des clients qui ont choisi la pension complète ont réservé l'option « ménage ».

On choisit un client au hasard parmi ceux de l'année 2018 et l'on considère les évènements suivants :

— C : le client a choisi la formule « pension complète » ;

— M : le client a choisi l'option « ménage ».

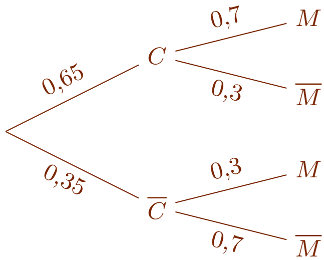
1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



2. Calculer $p(C \cap M)$.
3. Montrer que la probabilité que le client ait réservé l'option « ménage » est égale à $0,56$.
4. Calculer la probabilité que le client ait choisi la formule « pension complète » sachant qu'il a réservé l'option « ménage ».

Correction de l'exercice 5

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



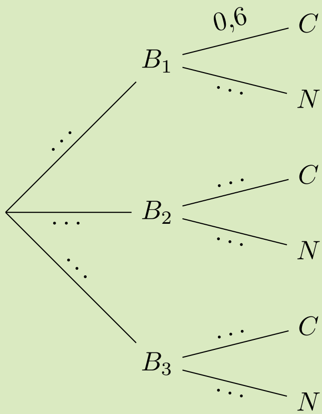
2. $p(C \cap M) = 0,455$.
3. $\mathbb{P}(M) = 0,65 \times 0,7 + 0,35 \times 0,3 = 0,56$.
4. $\mathbb{P}_M(C) = \frac{\mathbb{P}(C \cap M)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{0,455}{0,56} = 0,8125$.

Exercice 6. B

Un cafetier propose à ses clients des cookies au chocolat ou aux noisettes en s'approvisionnant dans trois boulangeries. Un client prend un cookie au hasard.
On note :
C l'évènement « le cookie est au chocolat »,
N l'évènement « le cookie est aux noisettes »,
B_1 l'évènement « le cookie provient de la boulangerie 1 »,
B_2 l'évènement « le cookie provient de la boulangerie 2 »,
B_3 l'évènement « le cookie provient de la boulangerie 3 ».
On suppose que :

- la probabilité que le cookie provienne de la boulangerie 1 est de 0,49 ;
- la probabilité que le cookie provienne de la boulangerie 2 est de 0,36 ;
- $P_{B_2}(C) = 0,4$ où $P_{B_2}(C)$ est la probabilité conditionnelle de C sachant B_2 ;
- la probabilité que le cookie soit aux noisettes sachant qu'il provient de la troisième boulangerie est de $0,3$.

L'arbre pondéré ci-dessous correspond à la situation et donne une information supplémentaire : le nombre $0,6$ sur la branche de B_1 à C.



Calculer $P(C)$.

Correction de l'exercice 6

$\mathbb{P}(C) = 0,49 \times 0,6 + 0,36 \times 0,4 + 0,15 \times 0,7 = 0,543.$