Dérivation.

I Fonctions de référence.

$f(x) =$	$k \in \mathbb{R}$	x	x^2	x^3	x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	e^x
$f'(x) =$	0	1	$2x$	$3x^2$	nx^{n-1}	e^x

$f(x) =$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$f'(x) =$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{2}{x^3}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$

II Combinaisons linéaires.

Proposition 1

Soient :

. λ et μ des réels,

. f et g des fonctions.

Si $f$et g sont dérivables sur un intervalle I alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

Corollaire 1

Toute fonction polynomiale $P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $P'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1$.

III Produit et quotient.

Proposition 2

Si u et v sont des fonctions dérivables sur I alors uv est dérivable sur I et

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Proposition 3

Si u et v sont des fonctions dérivables sur I et v ne s'annule pas sur I alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

IV Dérivation et variation.

Trois propositions importantes sont à savoir mettre en pratique.

(i) f est croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$.

(ii) Si $f' > 0$ alors f est strictement croissante.

(iii) $f' = 0$ si et seulement si f est constante.

V Dérivation et composition.

Si g est dérivable et si la fonction $x \mapsto g(ax + b)$ est bien définie alors cette dernière est dérivable et sa dérivée est $x \mapsto ag'(ax + b)$.

VI Exercices.

Exercice 1. A

Pour la fonction f proposée, procédez à son étude puis donnez l'allure de sa courbe représentative.

L'étude d'une fonction inclus, en toute rigueur et sans exhaustivité : recherche du domaine de définition, étude de la parité, étude de la dérivabilité, calcul de la fonction dérivée, étude du signe de la fonction dérivée, variations de la fonction, calcul d'images remarquables ou simples.

a) $f : x \mapsto x$.

b) $f : x \mapsto x^2$.

c) $f : x \mapsto x^3$.

d) $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

e) $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

f) $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

g) $f : x \mapsto 2x + 3$.

h) $f : x \mapsto -4x + 1$.

i) $f : x \mapsto 3x + 6$.

j) $f : x \mapsto 2x^2 - 4x + 5$.

k) $f : x \mapsto -3x^2 - 12x - 14$.

l) $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

m) $f : x \mapsto -\frac{2}{3}x^3 + 13x^2 + 28x - 17$.

n) $f : x \mapsto -2x^2 + 5\sqrt{x} - \mathrm{e}^x$.

Correction de l'exercice 1

a) Fonction de référence. $f' : x \mapsto 1$.

b) Fonction de référence. $f' : x \mapsto 2x$.

c) Fonction de référence. $f' : x \mapsto 3x^2$.

d) Fonction de référence. $f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

e) Fonction de référence. $f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

f) Fonction de référence. $f' : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

g) Fonction affine. $f' : x \mapsto 2$.

h) Fonction affine. $f' : x \mapsto -4$.

i) Fonction affine. $f' : x \mapsto 3$.

j) Fonction polynomiale de degré deux. Possibilité d'étude des variations avec la forme canonique du trinôme.

Étudions la fonction f.

* Calculons la dérivée de f.
  f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  $$f'(x) = 4x - 4.$$
* Étude du signe de f'.
  f' est affine de coefficient directeur $4 > 0$ donc strictement croissante. De plus $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
* Nous en déduisons

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	3	$\nearrow$	

* Pour le tracer faire apparaître le point de coordonnées $(1;3)$ et la tangente horizontale en ce point. Mais aussi le point d'intersection avec l'axe des ordonnées de coordonnées $(0;5)$.

k) $f' : x \mapsto -6x - 12$.

l)

Étudions la fonction f.

* Calculons la dérivée de f.
  f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  $$f'(x) = x^2 + x - 2.$$

* Étude du signe de f'.
  f' est polynomiale de degré deux et son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$.
  $\Delta > 0$ donc f'admet deux racines réelles distinctes :
  $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 1} = -2,$$
  et
  $$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times 1} = 1.$$
  De plus le coefficient dominant de f' est $a = 1 > 0$.

* Nous en déduisons (le trinôme es du signe de son coefficient dominant sauf entre les racines) :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\frac{13}{3}$	$\searrow$	$-\frac{1}{6}$	$\nearrow$	

* Pour le tracer faire apparaître les points de coordonnées $\left(-2, \frac{13}{3}\right)$ et $\left(1, -\frac{1}{6}\right)$ et la tangente horizontale en ces points. Mais aussi le point d'intersection avec l'axe des ordonnées de coordonnées $(0; 1)$.

m) $f' : x \mapsto -x^2 + 26x + 28$.

n) $f' : x \mapsto -4x + \frac{5}{2\sqrt{x}} - \mathrm{e}^x$.

Exercice 2. A

Pour la fonction f proposée, procédez à son étude puis donnez l'allure de sa courbe représentative.

a) $f : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^x$.
b) $f : x \mapsto (x^2+2x+1)\mathrm{e}^x$.
c) $f : x \mapsto (-3x+2)\sqrt{x}$.
d) $f : x \mapsto (x^2+x+1)\sqrt{x}$.
e) $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$.
f) $f : x \mapsto \frac{-2x+1}{3x+6}$.
g) $f : x \mapsto \frac{x^2-2}{x^2+x+1}$.
h) $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.
i) $f : x \mapsto \frac{-x+3}{x^7}$.
j) $f : x \mapsto \sqrt{3x+6}$.
k) $f : x \mapsto (2x+1)^7$.
l) $f : x \mapsto \frac{3}{(-2x+1)^3}$.
m) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x+7}$.
n) $f : x \mapsto x^2\mathrm{e}^{3x+6}$.

Correction de l'exercice 2

a) $f' : x \mapsto \mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x$. $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^x$.

b) $f' : x \mapsto (2x+2)\mathrm{e}^x + (x^2+2X+1)\mathrm{e}^x$. $f'(x) = (x^2+4x+3)\mathrm{e}^x$.

c) $f' : x \mapsto -3\sqrt{x} + \frac{-3x+2}{2\sqrt{x}}$. $f'(x) = \frac{-9x+2}{2\sqrt{x}}$.

d) $f' : x \mapsto (2x+1)\sqrt{x} + \frac{x^2+x+1}{2\sqrt{x}}$. $f'(x) = \frac{5x^2+3x+1}{2\sqrt{x}}$.

e) $f' : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x(x^2+1)-2x\mathrm{e}^x}{(x^2+1)^2}$. $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$.

f) $f' : x \mapsto \frac{-2(3x+6)-3(-2x+1)}{(3x+6)^2}$. $f'(x) = -\frac{15}{(3x+6)^2}$.

g) $f' : x \mapsto \frac{2x(x^2+x+1)-(x^2-2)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$. $f'(x) = \frac{2x^3+2x^2+2x-2x^3-x^2+4x+2}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x^2+6x+2}{(x^2+x+1)^2}$.

h) $f' : x \mapsto \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{(x+1)^2}$. $f'(x) = \frac{-x+1}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$.

i) $f' : x \mapsto \frac{-x^7-(-x+3)7x^6}{(x^7)^2}$. $f'(x) = \frac{6x^7-21x^6}{(x^7)^2} = \frac{x^6(6x-21)}{(x^7)^2}$.

j) $f' : x \mapsto \frac{3}{2\sqrt{3x+6}}$.

k) $f' : x \mapsto 2\times 7(2x+1)^6$.

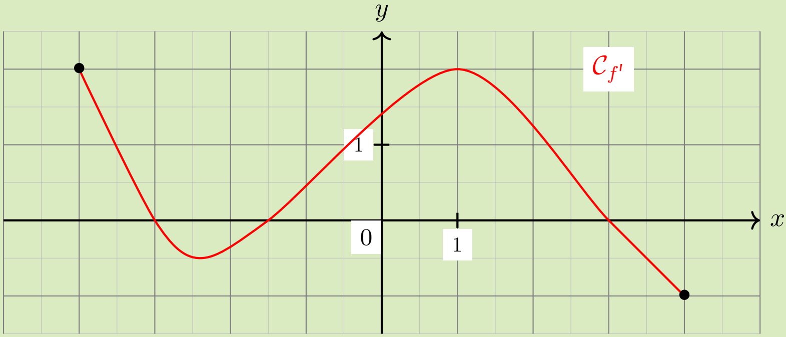
l) $f' : x \mapsto \frac{3\times(-3)\times(-2)}{(-2x+1)^4}$.

m) $f' : x \mapsto -2\mathrm{e}^{-2x+7}$.

n) $f' : x \mapsto 2x\mathrm{e}^{3x+6} + x^2 3\mathrm{e}^{3x+6}$. $f'(x) = x\mathrm{e}^{3x+6}(3x-2)$.

Exercice 3. A

Donnez, par lecture graphique, le tableau de variation de la fonction f dont la fonction dérivée f' est représentée ci-dessous.



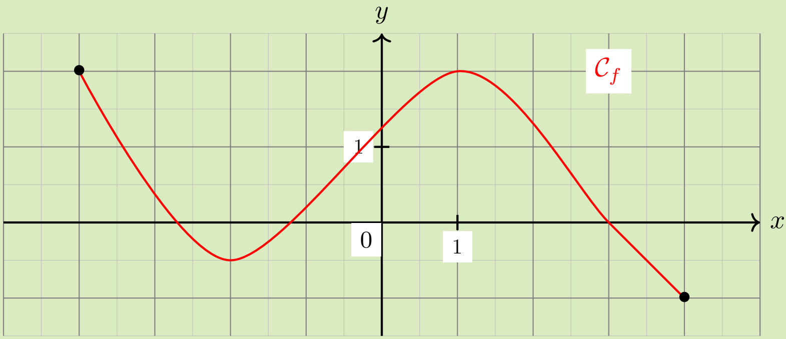
Correction de l'exercice 3

C'est la fonction dérivée, f', qui est représentée. À partir de son signe nous pourrons retrouver les variations de f d'après le théorème.

Pour se représenter les choses et justifier notre réponse, nous pouvons construire un tableau indiquant le signe de la dérivée et la variation de la fonction.

Exercice 4. A

Donnez, par lecture graphique, le tableau de signe de la fonction f' dérivée de la fonction f qui est représentée ci-dessous.



Correction de l'exercice 4

C'est la fonction f qui est représentée. À partir de ses variations nous pourrons retrouver le signe de sa fonction dérivée f' d'après le théorème.

Exercice 5. A

La dérivée f' d'une fonction f est représentée ci-contre. Par lecture graphique précisez les extrema locaux de f et pour quelles valeurs de x ils sont atteints.