# Dérivation.

## I Fonctions de référence.

| $f(x) =$ | $k \in \mathbb{R}$ | $x$ | $x^2$ | $x^3$ | $x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ | $\mathrm{e}^x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x) =$ | $0$ | $1$ | $2x$ | $3x^2$ | $nx^{n-1}$ | $\mathrm{e}^x$ |

| $f(x) =$ | $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{x}$ | $\dfrac{1}{x^2}$ | $\dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ | $\cos(x)$ | $\sin(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x) =$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ | $-\dfrac{2}{x^3}$ | $-\dfrac{n}{x^{n+1}}$ | $-\sin(x)$ | $\cos(x)$ |

## II Combinaisons linéaires.

**Proposition 1**

Soient :

. $\lambda$ et $\mu$ des réels,

. $f$ et $g$ des fonctions.

Si $f$et $g$ sont dérivables sur un intervalle $I$ alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur $I$ et

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

**Corollaire 1**

Toute fonction polynomiale $P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1$.

# III Produit et quotient.

Proposition 2

Si $u$ et $v$ sont des fonctions dérivables sur $I$ alors $uv$ est dérivable sur $I$ et

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Proposition 3

Si $u$ et $v$ sont des fonctions dérivables sur $I$ et $v$ ne s'annule pas sur $I$ alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur $I$ et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

# IV Dérivation et variation.

Trois propositions importantes sont à savoir mettre en pratique.

(i) $f$ est croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$.

(ii) Si $f' > 0$ alors $f$ est strictement croissante.

(iii) $f' = 0$ si et seulement si $f$ est constante.

# V Dérivation et composition.

Si $g$ est dérivable et si la fonction $x \mapsto g(ax+b)$ est bien définie alors cette dernière est dérivable et sa dérivée est $x \mapsto ag'(ax+b)$.

# VI Exercices.

## Exercice 1. A

Pour la fonction $f$ proposée, procédez à son étude puis donnez l'allure de sa courbe représentative.

*L'étude d'une fonction inclus, en toute rigueur et sans exhaustivité : recherche du domaine de définition, étude de la parité, étude de la dérivabilité, calcul de la fonction dérivée, étude du signe de la fonction dérivée, variations de la fonction, calcul d'images remarquables ou simples.*

a) $f : x \mapsto x$.

b) $f : x \mapsto x^2$.

c) $f : x \mapsto x^3$.

d) $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

e) $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

f) $f : x \mapsto e^x$.

g) $f : x \mapsto 2x + 3$.

h) $f : x \mapsto -4x + 1$.

i) $f : x \mapsto 3x + 6$.

j) $f : x \mapsto 2x^2 - 4x + 5$.

k) $f : x \mapsto -3x^2 - 12x - 14$.

l) $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

m) $f : x \mapsto -\frac{2}{3}x^3 + 13x^2 + 28x - 17$.

n) $f : x \mapsto -2x^2 + 5\sqrt{x} - e^x$.

## Exercice 2. A

Pour la fonction $f$ proposée, procédez à son étude puis donnez l'allure de sa courbe représentative.

a) $f : x \mapsto (x + 1)e^x$.

b) $f : x \mapsto (x^2 + 2x + 1)e^x$.

c) $f : x \mapsto (-3x + 2)\sqrt{x}$.

d) $f : x \mapsto (x^2 + x + 1)\sqrt{x}$.

e) $f : x \mapsto \frac{e^x}{x^2+1}$.

f) $f : x \mapsto \frac{-2x+1}{3x+6}$.

g) $f : x \mapsto \frac{x^2-2}{x^2+x+1}$.

h) $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

i) $f : x \mapsto \frac{-x+3}{x^7}$.

j) $f : x \mapsto \sqrt{3x + 6}$.

k) $f : x \mapsto (2x + 1)^7$.

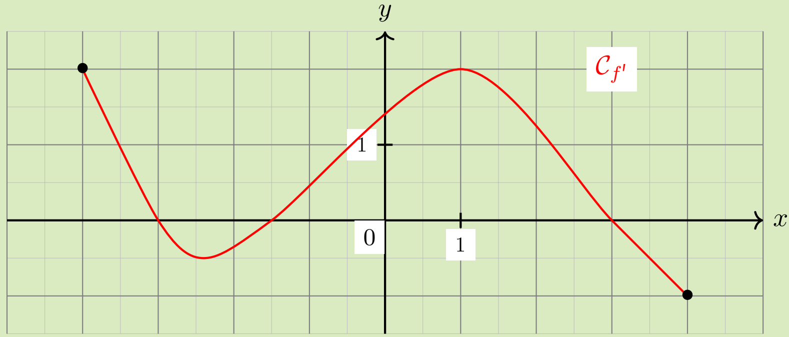
l) $f : x \mapsto \frac{3}{(-2x+1)^3}$.

m) $f : x \mapsto e^{-2x+7}$.

n) $f : x \mapsto x^2 e^{3x+6}$.

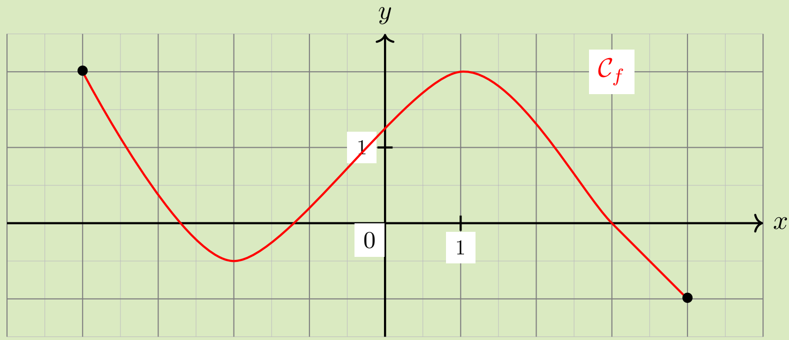
**Exercice 3.** A

Donnez, par lecture graphique, le tableau de variation de la fonction $f$ dont la fonction dérivée $f'$ est représentée ci-dessous.



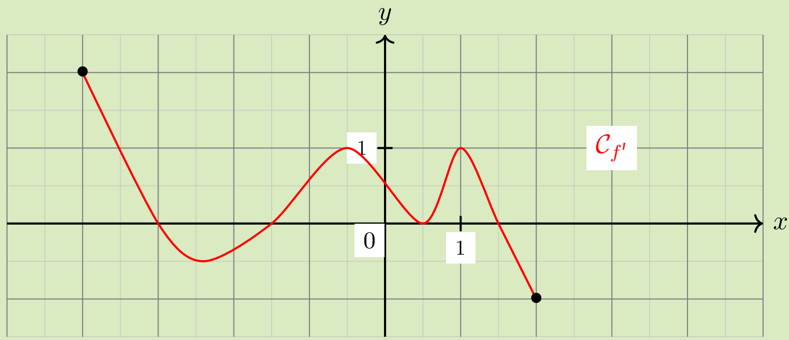

**Exercice 4.** A

Donnez, par lecture graphique, le tableau de signe de la fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$ qui est représentée ci-dessous.



## Exercice 5. A

La dérivée $f'$ d'une fonction $f$ est représentée ci-contre. Par lecture graphique précisez les extrema locaux de $f$ et pour quelles valeurs de $x$ ils sont atteints.




## Exercice 6. C

Soit $f$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} + x - 3.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthonormal.
Soit $g$ la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x - 3)$.

1. Position relative.
   (a) Justifiez que pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0;+\infty[$, $g(x) > 0$.
   (b) $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$ ont-elles un point commun ?
2. On note $M$ le point d'abscisse $x$ de $\mathscr{C}_f$, $N$ le point d'abscisse $x$ de la droite $\mathscr{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance $MN$.
   (a) Justifier que, pour tout $x$ de l'intervalle $[0;+\infty[$, la distance $MN$ est égale à $g(x)$.
   (b) On note $g'$ la fonction dérivée de la fonction $g$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Pour tout $x$ de l'intervalle $[0;+\infty[$, calculer $g'(x)$.
   (c) Montrer que la fonction $g$ possède un maximum sur l'intervalle $[0;+\infty[$ que l'on déterminera. En donner une interprétation graphique.