

1. Petits problèmes de dénombrements.

Exercice 1.

1. Avec quatre points donnés comme sommets, on peut tracer 3 quadrilatères. Combien peut-on tracer de polygones avec n points donnés comme sommets ?
2. Combien peut-on tracer de quadrilatères ayant comme sommets 4 points pris parmi n points donnés ?
3. Quel est le nombre de diagonales d'un polygone convexe de n sommets, avec $n \geq 3$?

Exercice 2.

1. Dix couples se rencontrent et se saluent. Chaque personne serre (une fois) la main de chacune des autres (sauf celle de son conjoint. Combien y aura-t-il de poignées de mains échangées ?
2. Généraliser au cas de n couples.

Exercice 3.

Une matrice 2×2 est un tableau de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. Dénombrez les matrices 2×2 dont les coefficients sont pris dans l'ensemble $\{-1; 0; 1\}$.
2. Parmi celles-ci combien y en a-t-il qui vérifient la condition $ad - bc \neq 0$?

Exercice 4. Pensez-vous que parmi les nombres entiers, ceux dont l'écriture décimale usuelle n'utilise pas le chiffre 0 représentent une proportion importante ? « Il y a une infinité d'entiers » direz-vous ! Bien, alors parlons des entiers jusqu'à un certain A que l'on peut choisir arbitrairement grand. Pour être plus précis on choisira $A = 10^n$, ce qui revient à considérer les entiers dont l'écriture utilise au plus n chiffres.

1. Dénombrez les entiers compris entre 10^{k-1} et 10^k s'écrivant sans 0 pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
2. Déduisez-en la proportion des entiers inférieurs à 10^n s'écrivant sans 0 et déterminez sa limite lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 5.

Quelques considérations arithmétiques sur $n!$.

1. Par combien de 0 se termine $100!$?
2. Quel est le plus petit n tel que $n!$ se termine par 100 zéros ?
3. Pourquoi le plus petit diviseur premier de $n! + 1$ est-il plus grand que n ? En déduire que pour tout entier naturel n , il existe un nombre premier plus grand que n .

Exercice 6. La tour de Hanoï se compose d'une planchette qui supporte trois tiges et des disques percés, de diamètres différents. Au départ les disques sont enfilés par tailles décroissantes sur l'une des tiges. Chaque coup de jeu consiste en un déplacement d'un disque d'une tige à une autre. Mais au cours du jeu, on n'a jamais le droit de poser un disque sur un disque plus petit. Il s'agit, par des coups de jeu successifs de faire passer la tour complète d'une tige à une autre tige.

Le problème est de déterminer le nombre de coups de jeu nécessaires. *Indication* : Raisonnez par récurrence sur le nombre de disques, en considérant que l'on passe d'une tour à une tour plus haute par adjonction d'un disque plus grand que les précédents.

Exercice 7.

1. On dispose de 7 couleurs pour colorier les 4 cases du drapeau ci-dessous.

Combien peut-on obtenir de drapeaux différents si on impose que deux rectangles adjacents ne soient pas de la même couleur ?

2. Généralisez au cas où l'on dispose de p couleurs pour un drapeau de 2 rangées de n rectangles (2 lignes, n colonnes) ?