

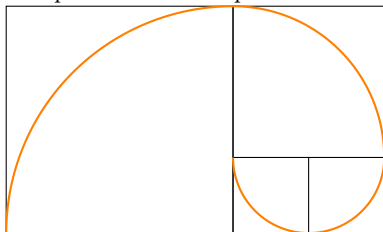
Travail libre 1 : suite de Fibonacci.

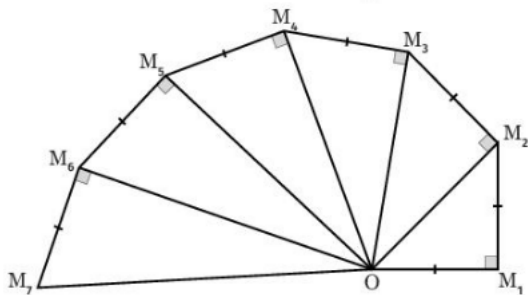
On s'intéresse dans cet exercice à la suite dite de Fibonacci qui est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout entier naturel n

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (\star).$$

Spirale de Fibonacci.

1. Calculez F_2, F_3, F_4, F_5 .
2. Tracez un carré de 1 unité de côté. Puis un second carré ayant un côté commun avec le précédent. Puis enroulez successivement des carrés comme ci-dessous. Enfin tracez des quarts de cercles pour dessiner la spirale de Fibonacci.





Calculez OM_5 puis déduisez-en une construction (à la règle et au compas) de φ .

9. Démontrez que la suite $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et trouvez sa limite.

Travail sur l'anneau $\mathbb{R}[\varphi]$.

10. On s'intéresse dans cette question aux puissances de φ .

Rappelons que nous avons établi que $\varphi^2 = \varphi + 1$. Autrement dit φ^2 est de la forme $a + b\varphi$, avec a et b des entiers, puisque $\varphi^2 = 1 + 1 \times \varphi$.

- Écrivez φ^3 , φ^4 , φ^5 sous la forme $a + b\varphi$ où a et b sont des nombres entiers.
- Démontrez que pour tout entier $n \geq 2$, $\varphi^n = F_{n-1} + F_n\varphi$.
- À l'aide de la question précédente on a conçu le programme suivant, dans le but de fournir les valeurs de a et b dans la décomposition de φ^n sous la forme $a\varphi + b$ pour n entier naturel quelconque.

```
def coefficients(n):
    if n==0:
        l=[0,1]
    if n==1:
        l=[1,0]
    if n>1:
        l=[1,1]
    if n>2:
        for k in range(1,n-1):
            c=l[0]
            l[0]=.....
            l[1]=.....
    return l
```

Complétez cet algorithme.

Déduisez-en φ^{35} .

Une suite d'ordre 1 tendant vers φ .

11. Dans cette question nous allons voir une façon d'obtenir des valeurs approchées de φ grâce à une suite récurrente d'ordre 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$. Considérons la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \varphi$.
- Déduisez-en que (u_n) converge et déterminez sa limite (en recherchant un point fixe).

- (c) Déduisez de ce qui précède une écriture de φ sous forme de radicaux itérés.

Une formule explicite de (F_n) .

12. Dans cette question on souhaite donner une expression explicite du terme général de la suite de Fibonacci. Pour cela on part d'une suite inspirée des questions précédentes :

$$v_n = \lambda \varphi^n + \mu \alpha^n,$$

définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ où λ et μ sont des nombres réels que nous déterminerons ci-après.

- (a) Démontrez que la suite (v_n) vérifie la relation de récurrence $(\star)$.
 (b) Démontrez que si (v_n) est la suite de Fibonacci alors nécessairement $\lambda = -\mu$.
Indication. Si (v_n) est la suite Fibonacci alors en particulier on doit avoir $v_0 = 0$.
 (c) Déduisez-en que si (v_n) est la suite de Fibonacci alors nécessairement $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
Indication. Si (v_n) est la suite Fibonacci alors en particulier on doit avoir $v_1 = 1$.

Dorénavant on pose, pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

On pourra aussi l'écrire

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \alpha^n.$$

- (d) Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n

$$F_n = v_n.$$

Étude asymptotique de $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \alpha^n$ et que $-1 < \alpha < 0$.

13. Étudiez la convergence de (F_n) .

Somme des termes de la suite de Fibonacci.

14. Dans cette question on souhaite calculer la somme S_n des termes de la suite de Fibonacci jusqu'au rang n : $S_n = \sum_{i=0}^n F_i$.

- (a) Écrivez $\sum_{i=0}^5 F_i$ avec le symbole d'addition usuel $+$.
 (b) Calculez S_0, S_1, S_2 .
 (c) En utilisant l'expression de F_n trouvée à la question précédente (c'est-à-dire v_n), montrez que, pour tout entier naturel n

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{i=0}^n \varphi^i \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{i=0}^n \alpha^i \right).$$

- (d) Déduisez-en, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1 - \varphi^{n+1}}{1 - \varphi} - \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \right].$$

Suite de Fibonacci et coefficients binomiaux.

15. Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k = F_{2n}.$

16. Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} F_k = -F_n.$

17. Les F_n sont les sommes des diagonales ascendantes du triangle de Pascal. Autrement

dit : $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n \binom{n-k}{k}.$