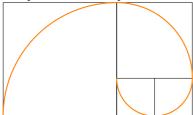
#### Travail libre 1 : suite de Fibonacci.

On s'intéresse dans cet exercice à la suite dite de Fibonacci qui est définie par  $F_0=0,$   $F_1=1$  et pour tout entier naturel n

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (*).$$

#### Spirale de Fibonacci.

- 1. Calculez  $F_2, F_3, F_4, F_5$ .
- 2. Tracez un carré de 1 unité de côté. Puis un second carré ayant un côté commun avec le précédent. Puis enroulez successivement des carrés comme ci-dessous. Enfin tracez des quarts de cercles pour dessiner la spirale de Fibonacci.



Où la suite de Fibonacci apparaît-elle dans cette figure?

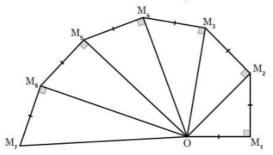
# Premiers pas avec $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .

- Démontrez, par une récurrence double, que les termes de la suite de Fibonacci sont tous positifs.
- 4. En remarquant que, pour  $n \ge 1$ , la relation (\*) peut s'écrire  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ , déduisez de la question précédente le sens de variation de la suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- 5. Montrez:  $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1}^2 F_n F_{n+2} = (-1)^n$ .

# Le nombre d'or $\varphi$ .

- 6. On souhaite dans cette question chercher des suites géométriques qui vérifient la relation de récurrence  $(\star)$ .
  - (a) Soit  $q \in \mathbb{R}_+^*$ . Montrez que, si la suite  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie la relation de récurrence  $(\star)$  alors q est solution de l'équation  $q^2 q 1 = 0$ .
  - (b) Résolvez l'équation  $x^2 x 1 = 0$ . Vous noterez  $\varphi$  la plus grande solution et  $\alpha$  la plus petite.
- 7. Dans cette question on étudie les nombres  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  obtenus à la question précédente.
  - (a) Justifiez que  $1 < \varphi < 5$ .
  - (b) Démontrez que  $\alpha = 1 \varphi$ .
  - (c) Justifiez, grâce à la question 2, que  $\varphi^2 = \varphi + 1$ .
  - (d) Déduisez-en que :  $\varphi 1 = \frac{1}{\omega}$ .
  - (e) Déduisez-en que  $\alpha = -\frac{1}{\varphi}$ .
- 8. Nous allons voir une construction géométrique de  $\varphi$ . On construit, comme sur la figure ci-dessous, de proche en proche; les points  $M_1,\ M_2,\ ...,\ M_7$  en partant de  $OM_1=1$ . On obtient ainsi la spirale de Pythagore :

1



Calculez  $OM_5$  puis déduisez-en une construction (à la règle et au compas) de  $\varphi$ .

9. Démontrez que la suite  $\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$  converge et trouvez sa limite.

#### Travaille sur l'anneau $\mathbb{R}[\varphi]$ .

- 10. On s'intéresse dans cette question aux puissances de  $\varphi$ . Rappelons que nous avons établi que  $\varphi^2 = \varphi + 1$ . Autrement dit  $\varphi^2$  est de la forme  $a + b\varphi$ , avec a et b des entiers, puisque  $\varphi^2 = 1 + 1 \times \varphi$ .
  - (a) Écrivez  $\varphi^3$ ,  $\varphi^4$ ,  $\varphi^5$  sous la forme  $a+b\varphi$  où a et b sont des nombres entiers.
  - (b) Démontrez que pour tout entier  $n \ge 2$ ,  $\varphi^n = F_{n-1} + F_n \varphi$ .
  - (c) À l'aide de la question précédente on a conçu le programme suivant. dans le but de fournir les valeur de a et b dans la décomposition de  $\varphi^n$  sous la forme  $a\varphi + b$  pour n entier naturel quelconque.

```
def coefficients(n):
    if n==0:
        1=[0,1]
    if n==1:
        1=[1,0]
    if n>1:
        1=[1,1]
    if n>2:
        for k in range(1,n-1):
        c=1[0]
        1[0]=.....
        1[1]=.....
    return 1
```

Complétez cet algorithme. Déduisez-en  $\varphi^{35}$ .

# Une suite d'ordre 1 tendant vers $\varphi$ .

- 11. Dans cette question nous allons voir une façon d'obtenir des valeurs approchées de  $\varphi$  grâce à une suite récurrente d'ordre 1. Soit f la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f(x) = \sqrt{1+x}$ . Considérons la suite définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
  - (a) Montrez que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \varphi$ .
  - (b) Déduisez-en que  $(u_n)$  converge et déterminez sa limite (en recherchant un point fixe).

(c) Déduisez de ce qui précède une écriture de  $\varphi$  sous forme de radicaux itérés.

# Une formule explicite de $(F_n)$ .

12. Dans cette question on souhaite donner une expression explicite du terme général de la suite de Fibonacci. Pour cela on part d'une suite inspirée des questions précédentes :

$$v_n = \lambda \varphi^n + \mu \alpha^n,$$

définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des nombres réels que nous déterminerons ci-après.

- (a) Démontrez que la suite  $(v_n)$  vérifie la relation de récurrence  $(\star)$ .
- (b) Démontrez que si  $(v_n)$  est la suite de Fibonacci alors nécessairement  $\lambda = -\mu$ . Indication. Si  $(v_n)$  est la suite Fibonacci alors en particulier on doit avoir  $v_0 = 0$ .
- (c) Déduisez-en que si  $(v_n)$  est la suite de Fibonacci alors nécessairement  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Indication. Si  $(v_n)$  est la suite Fibonacci alors en particulier on doit avoir  $v_1 = 1$ .

Dorénavant on pose, pour tout entier naturel n:

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

On pourra aussi l'écrire

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n.$$

(d) Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n

$$F_n = v_n$$
.

# Étude asymptotique de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .

On admet que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n$  et que  $-1 < \alpha < 0$ .

13. Étudiez la convergence de  $(F_n)$ .

#### Somme des termes de la suite de Fibonacci.

- 14. Dans cette question on souhaite calculer la somme  $S_n$  des termes de la suite de Fibonacci jusqu'au rang  $n: S_n = \sum_{i=0}^n F_i$ .
  - (a) Écrivez  $\sum_{i=0}^{5} F_i$  avec le symbole d'addition usuel +.
  - (b) Calculez  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ .
  - (c) En utilisant l'expression de  $F_n$  trouvée à la question précédente (c'est-à-dire  $v_n$ ), montrez que, pour tout entier naturel n

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \sum_{i=0}^n \varphi^i \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \sum_{i=0}^n \alpha^i \right).$$

(d) Déduisez-en, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \frac{1 - \varphi^{n+1}}{1 - \varphi} - \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \right].$$

#### Suite de Fibonacci et coefficients binomiaux.

- 15. Montrez que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k = F_{2n}.$
- 16. Montrez que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} F_k = -F_n$ .

  17. Les  $F_n$  sont les sommes des diagonales ascendantes du triangle de Pascal. Autrement dit :  $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n \binom{n-k}{k}$ .

dit: 
$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n \binom{n-k}{k}.$$