

Équation différentielle.

On s'intéresse dans ce problème à l'ensemble des solutions de l'équation différentielle
(1) $y' - 2y = 8x^2 - 8x$, c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :
 $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - 2f(x) = 8x^2 - 8x$.

Partie A.

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (muni de l'addition de ces applications et de leur multiplication par un scalaire).

- (a) $\mathcal{S}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$?
(b) Montrer qu'il existe dans $\mathcal{S}$ une fonction polynomiale du deuxième degré et une seule : précisez cet élément de $\mathcal{S}$.
- (a) Vérifiez que si f et g sont des éléments de $\mathcal{S}$, alors leur différence $f - g$ est élément de $\mathcal{S}_h$ où $\mathcal{S}_h$ désigne l'ensemble solutions de l'équation différentielle
(2) $y' - 2y = 0$, c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des fonctions h dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) - 2h(x) = 0$.
(b) Prouvez que $\mathcal{S}_h$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, dont la fonction $h_1 : x \mapsto e^{2x}$ constitue une base. *On sera amené à poser $h = u \times h_1$ et montrer que $h \in \mathcal{S}_h$ si, et seulement si, u est une fonction constante.*
- Déduisez-en que : $\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{F} \mid \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = me^{2x} - 4x^2\}$.

Partie B.

On considère dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la famille des courbes représentatives des fonctions $f_m : x \mapsto me^{2x} - 4x^2$ (où m est un paramètre réel).

- Montrer que par tout point M du plan passe une courbe de la famille et une seule, et vérifier que pour une même abscisse x_0 l'ordonnée $f_m(x_0)$ du point de la courbe représentative f_m est une fonction croissante de m .
On désignera par C_m la courbe représentative de la fonction f_m (le paramètre réel m étant fixé), ou encore par $C[M]$ la courbe de la famille passant par le point M .
- (a) Étudier les variations de la fonction $\varphi : x \mapsto 4xe^{2x}$ et construire sa courbe représentative.
(b) En déduire, selon la valeur du paramètre m , les variations de la fonction f_m (on sera amené à discuter le signe de $m - \varphi(x)$).
- (a) Selon la valeur de m , la courbe C_m possède au plus deux points où la tangente est parallèle à l'axe $(O; \vec{i})$: montrer que lorsque m décrit $\mathbb{R}$ l'ensemble des points ainsi obtenus est une parabole (P) dont on donnera une équation cartésienne et dont on indiquera le sommet S .
(b) Montrer que la tangente à C_m en son point d'intersection avec l'axe $(O; \vec{j})$ passe par le point I de coordonnées $(-\frac{1}{2}, 0)$.
- (a) Tracer sur un même graphique et avec soin, en prenant 4 cm pour unité de longueur,
 - la parabole (P) ,
 - la courbe C_0 (correspondant à $m = 0$),
 - la courbe $C_{\frac{2}{e}}$ (dont on vérifiera qu'elle passe par le sommet S de (P)).

- (b) Déterminer l'aire de la partie du plan comprise entre la droite D_α d'équation $x = -\alpha$ (où α est un réel donné positif), la courbe C_0 , la courbe $C_{\frac{2}{e}}$ et l'arc (OS) de la parabole (P) . Quelle est la limite de cette aire lorsque α tend vers $+\infty$?
- (c) Construire sur ce graphique la courbe $C_{[A]}$ passant par le point A de coordonnées $(1,0)$.