Suite convergeant vers $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}$.

Dans la partie A, n désigne un nombre entier positif ou nul. dans la partie B, n désigne un nombre entier strictement positif.

Partie A.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour les valeurs de t appartenant au segment réel $[0,1]$ par $f_n(t) = (1-t^2)^{\frac{n}{2}}$, ainsi que la suite de nombres réels $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n}{2}}\ \mathrm{d}t$.

1. Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[0,1]$. Cette convergence est-elle uniforme ? Justifier votre réponse. Les notions de convergence simple, absolue, uniforme, normale sont inconnues des lycéens. Question à passer.

   * Soit $t \in]0,1]$. $\sqrt{1-t^2} \in]0,1]$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, donc $\sqrt{1-t^2}^n \underset{\longrightarrow}{n \to +\infty} 0$. Mais $\sqrt{1-0^2}^n = 1$.
     Ainsi (f_n) converge simplement vers $f : t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t \in]0,1] \\ 1 \text{ si } t = 0 \end{cases}$.
   * f n'étant pas continue alors que les f_n le sont, la convergence ne peut être uniforme.

2. Montrer sans calcul que, pour tout n, I_n est un nombre réel strictement positif.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   * Le minimum de $t \mapsto (1-t^2)^{\frac{n}{2}}$ étant 0 nous ne pouvons l'utiliser comme minorant travaillons avec une autre intégrale en remarquant que $\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n}{2}}\ \mathrm{d}t \geqslant \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t^2)^{\frac{n}{2}}\ \mathrm{d}t$ puisque f_n est positive sur $[0,1]$.
   * $t \mapsto (1-t^2)^{\frac{n}{2}}$ est décroissante par composition d'une fonction décroissante et de fonctions croissantes. Nous en déduisons que, pour tout $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $(1-t^2)^{\frac{n}{2}} \geqslant \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$.
   * Nous en déduisons, en intégrant sur $[0,1]$: $\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n}{2}}\ \mathrm{d}t \geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}} > 0$.

3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Soit $t \in [0,1]$.
   $0 \leqslant \sqrt{1-t^2}) \leqslant 1$ donc en multipliant par $(1-t^2)^{\frac{n}{2}}$: $f_{n+1}(t) \leqslant f_n(t)$. En intégrant sur $[0,1]$, $I_{n+1} \leqslant I_n$.

4. Montrer sans calcul que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
   * (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente.
   * Soit $\varepsilon \in]0,1[$.
     Soit $n \in \mathbb{N}$.
     Du fait de la décroissance de f_n : $0 \leqslant I_n = \int_0^\varepsilon (1-t^2)^{\frac{n}{2}}\ \mathrm{d}t + \int_\varepsilon^1 (1-t^2)^{\frac{n}{2}}\ \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon + (1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)^{\frac{n}{2}}$.
     D'après les résultats de comparaison des limites $0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} I_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} \varepsilon + (1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)^{\frac{n}{2}} = \varepsilon$.
     Nous avons établi que pour tout $t \in]0,1[$, $0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} I_n \leqslant \varepsilon$. Autrement dit : $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

5. Établir, par une intégration par parties, une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$.
   $I_n = \left[t(1-t^2)^{\frac{n}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 t \times (-2t)\frac{n}{2}(1-t^2)^{\frac{n-2}{2}}\ \mathrm{d}t = n\int_0^1 t^2(1-t^2)^{\frac{n-2}{2}}\ \mathrm{d}t = n\left(\int_0^1 -(1-t^2)^{\frac{n-2}{2}}\ \mathrm{d}t + \int_0^1 (1-\right.$
   $-nI_{n-2} + nI_n$. Nous en déduisons : $nI_{n-2} = (n+1)I_n$ et donc $I_n = \frac{n}{n+1} I_{n-2}$.

6. Calculer I_0 et I_1, puis à l'aide de la question 5, donner la valeur de I_n pour tout n.
   * $I_0 = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1$.

* $I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t$. Changement de variable : $u = \sin(t)$ et donc $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$. $I_1 = \int_0^1 (1-t^2)\ \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-u^2\ \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\ \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2u)+1}{2}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2u)+u\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.
* $I_{2n} = \frac{(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\cdots\times 3}$ et $I_{2n+1} = \frac{(2n+1)\times\cdots\times 3}{(2n+2)\times\cdots\times 4}\frac{\pi}{4}$.

7. Trouver la limite de la suite de nombres réels $(nI_nI_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$.
$nI_nI_{n-1} = n\frac{n\times\cdots\times 2}{(n+1)\times\cdots\times 3}\frac{\pi}{4} = \frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.
8. Trouver la limite de la suite de nombres réels $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
D'après la question précédente : $nI_nI_{n-1} \sim \frac{\pi}{2}$ donc $nI_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$, $I_n \sim \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}$, $nI_n \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
9. Montrer, par l'utilisation de la question 6, que $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi$ vérifie $J_{2p} = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2p-3)\times(2p-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2p-2)\times 2p} \times \frac{\pi}{2}$ et $J_{2p+1} = \frac{2\times 4\times\cdots\times(2p-2)\times 2p}{1\times 3\times\cdots\times(2p-3)\times(2p-1)} \times \frac{1}{2p+1}$.
10. Montrer que l'intégrale $K_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{\frac{n+3}{2}}}$ existe et donner sa valeur.

Partie B.

1. Établir pour tout t réel : $0 \leqslant \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n} - \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{t^2 - n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)} - 1$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(x) \leqslant x+1$$

donc

$$\ln(1+x) \leqslant x$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right) &\leqslant \frac{t^2}{n} \\
0 &\leqslant t^2 - n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right) \\
1 &\leqslant \mathrm{e}^{t^2 - n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)} \\
0 &\leqslant \mathrm{e}^{t^2 - n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)} - 1
\end{aligned}$$

Par conséquent de

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant 1$$

on déduit :

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \mathrm{e}^{-t^2}\left[\mathrm{e}^{t^2 - n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)} - 1\right] \leqslant \mathrm{e}^{t^2 - n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)} - 1 \\
0 &\leqslant \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n} - \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{t^2 - n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)} - 1
\end{aligned}$$

2. Déduire de la question 1 et de l'étude de la fonction $t \mapsto t^2 - n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)$ que, pour tout a réel strictement positif, la suite des fonctions $t \mapsto \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}$ converge uniformément vers la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ dans le segment $[0,a]$.

   * $h : t \mapsto \ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(t) = \frac{2t}{n+t^2} > 0$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$. D'où : $0 \leqslant \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n} - \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{a^2 - n\ln\left(1+\frac{a^2}{n}\right)} - 1$ quel que soit $t \in [0,a]$.

   * $\ln\left(1+\frac{a^2}{n}\right) = -\frac{a^2}{n} + \frac{a^4}{2n^2} - \frac{a^6}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ donc $a^2 - n\ln\left(1+\frac{a^2}{n}\right) = a^2 - a^2 + \frac{a^4}{2n} - \frac{a^6}{3n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi $a^2 - n\ln\left(1+\frac{a^2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En composant : $\mathrm{e}^{a^2 - n\ln\left(1+\frac{a^2}{n}\right)} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 - 1 = 0$.

   On en déduit la convergence uniforme.

3. Montrer l'existence des intégrales $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $A_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}$. Calculer A_n.

   * $\mathrm{e}^{-t^2} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc par comparaison asymptotique $x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge en $+\infty$.

   * De même $\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{n}{t^{2n}}$ donc A_n existe.

4. Après avoir remarqué que $\frac{1}{1+t^2} \geqslant \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}$ pour tout t réel, établir que $\lim_{n\to+\infty} A_n = I$.

   $\frac{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}{1+t^2} \geqslant 1$.

5. Calculer I.