EXERCICE 1. Partie A.

On appelle F l'ensemble des applications f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : (1) $\left\{\begin{array}{l} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ f(0) \geqslant 0 \end{array}\right.$

1. Vérifier que la fonction $x \mapsto 2^{-x^2}$ appartient à F.
2. Écrire ce que devient la relation (1) dans chacun des cas suivants : $x = 0$, $y = 0$, $x = y$. Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
3. Montrer que $f(0) = 0$ si et seulement si f est l'application identiquement nulle notée $\tilde{0}$.
4. On suppose que f s'annule pour une valeur $a \neq 0$.
   (a) On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{a}{2^n}$. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limites.
   (b) Montrer par récurrence sur l'entier n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(U_n) = 0$ (utiliser la question 2). En déduire alors que $f(0) = 0$.
5. On suppose $f \neq \tilde{0}$. calculer $f(0)$. Montrer que f ne s'annule jamais et que, pour tout réel x, $f(x) > 0$. Montrer que f est une fonction paire.

Partie B.

Soit G l'ensemble des fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $\exists f \in F$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(f(x))$.

1. Montrer à l'aide la relation (1) vérifiée par f, que tout élément g de G vérifie la relation : (2) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x+y) + g(x-y) = 2[g(x) + g(y)]$.
2. Déterminer $g(0)$ et montrer que g est une fonction paire.
3. Montrer à l'aide de la relation (2) que : (3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(nx) = n^2 g(x)$. Montrer que la relation (3) reste vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$.
4. Montrer que : $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(rx) = r^2 g(x)$ (on pourra poser $r = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$). On pose $g(1) = \lambda$. En déduire que : $\forall r \in \mathbb{Q}$, $g(r) = \lambda r^2$. En déduire $f(r)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

Partie C.

On admet dans toute la suite que les fonction de F distinctes de $\tilde{0}$ sont les fonctions f_λ, où λ est un paramètre réel quelconque, définies par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_\lambda(x) = e^{\lambda x^2}$. On note C_λ la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Étudier les variations de f_λ suivant les valeurs de λ. Pour quelles valeurs de λ la courbe C_λ a-t-elle une asymptote ?
2. Montrer que si $\lambda > 0$, il existe sur C_λ deux points A_λ et B_λ en lesquels la tangente passe par l'origine. Exprimer les coordonnées de A_λ et B_λ en fonction de $\lambda > 0$. Quel est l'ensemble formé par les points A_λ et B_λ lorsque λ varie ?