Exercice 1 **Asie Juin 2022 Sujet 2 (7 points)**

Principaux domaines abordés: Probabilités conditionnelles et indépendance. Variables aléatoires.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1

Julien doit prendre l'avion; il a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport.
S'il prend le bus de 8 h, il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol.
Par contre, le bus suivant ne lui permettrait pas d'arriver à temps à l'aéroport.
Julien est parti en retard de son appartement et la probabilité qu'il manque son bus est de 0,8.
S'il manque son bus, il se rend à l'aéroport en prenant une compagnie de voitures privées; il a alors une probabilité de 0,5 d'être à l'heure à l'aéroport.
On notera :

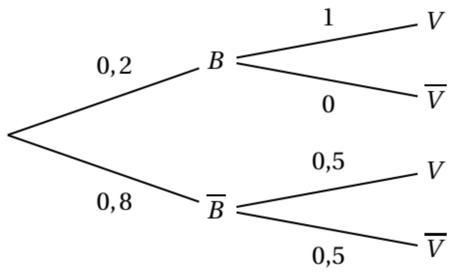
- B l'évènement: « Julien réussit à prendre son bus »;
- V l'évènement: « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol » .

1. Donner la valeur de $P_B(V)$.

S'il a pris le bus il est à l'heure pour son vol, donc $P_B(V) = 1$.

0,5 pt

2. Représenter la situation par un arbre pondéré.



0,5 pt

3. Montrer que $P(V) = 0,6$.

D'après la loi des probabilités totales :
$P(V) = P(B \cap V) + P(\overline{B} \cap V) = 0,2 \times 1 + 0,8 \times 0,5 = 0,2 + 0,4 = 0,6.$

0,5 pt

4. Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ? Justifier.

On calcule $P_V(B)$

$$P_V(B) = \frac{P(V \cap B)}{P(V)} = \frac{P(B \cap V)}{P(V)} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}$$

0,5 pt

Partie 2

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On appelle cette pratique le surbooking.
Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.
Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

La présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres et chaque passager a la même probabilité 0,95 d'être présent, donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 206$ et $p = 0,95$.

0,5 pt

2. En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?

On a $\mathrm{E} = n \times p = 206 \times 0,95 = 196,3 \approx 196$.
En moyenne sur 206 titulaires d'un billet à peu près 196 vont se présenter.

0,5 pt

3. Calculer la probabilité que 201 passagers se présentent à l'embarquement. Le résultat sera arrondi à 10^{-3} près.

On a $P(X = 201) = \binom{206}{201} \times 0{,}95^{201} \times 0{,}05^5 \approx 0{,}3063$, soit 0,306 au millième près. **0,5 pt**

4. Calculer $P(X \leqslant 200)$, le résultat sera arrondi à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

La calculatrice donne $P(X \leqslant 200) \approx 0{,}9477$, soit 0,948 au millième près.
Il est donc à peu près certain que l'avion sera au mieux juste rempli. **0,5 pt**

5. La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros.
Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé.
On appelle :
Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet;
C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol.
On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant:

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	0,94775	0,03063	0,01441	0,00539	0,00151	0,00028	0,00003

(a) Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus en calculant $P(Y = 6)$.

En complétant à 1 la somme des probabilités données dans le tableau on trouve:
$P(Y = 6) = 1 - (P(Y = 0) + P(Y = 1) + \cdots + P(Y = 5)) = 0{,}00003$. **0,5 pt**

(b) Justifier que: $C = 51500 - 850Y$.

La compagnie a encaissé $206 \times 250 = 51500$ € et elle devra rembourser 850 € à chaque client ne pouvant embarquer, donc $C = 51500 - 850Y$ **0,5 pt**

(c) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire C sous forme d'un tableau.
Calculer l'espérance de la variable aléatoire C à l'euro près.

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$c_i = 51500 - 850y_i$	51500	50650	49800	48950	48100	47250	46400
$P(Y = y_i)$	0,94775	0,03063	0,01441	0,00539	0,00151	0,00028	0,00003

On a $\mathrm{E}(C) = 51500 \times 0{,}94775 + \cdots 46400 \times 0{,}00003 \approx 51429{,}2$, soit 51 429 € à l'euro près **1+0,5 pt**

(c) Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

En vendant exactement 200 billets, la compagnie fera un chiffre d'affaires de 200×250 soit 50000 euros. **0,5 pt**
En pratiquant le surbooking, la compagnie peut espérer un chiffre d'affaires de 51429 euros.

Exercice 2 (7 points) Polynésie 4 septembre 2019

Les parties A *et* B *peuvent être abordées de façon indépendante.*

Deux groupes de scientifiques, des spécialistes en environnement et des biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang.

Partie A - Étude d'un modèle discret d'évolution

Le groupe de spécialistes en environnement étudie le taux de disponibilité des ressources nécessaires pour le développement de la population de grenouilles autour de l'étang. Ce taux dépend notamment du nombre de grenouilles présentes sur les lieux, de la quantité de nourriture à disposition, de l'espace disponible et de la qualité de l'environnement.

Une étude, menée en 2018 par ce premier groupe de scientifiques, a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à 0,9 ; cela signifie que 90 % des ressources sont disponibles.

On modélise le taux de disponibilité des ressources par la suite (T_n) qui, à tout entier naturel n, associe le taux de disponibilité des ressources n années après 2018. On a ainsi $T_0 = 0{,}9$.

Le modèle choisi est tel que, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} = T_n - 0{,}1T_n^2$.

1. Certains spécialistes en environnement estiment qu'en 2022, le taux de disponibilité des ressources sera proche de 0,4. Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?

On a $T_0 = 0{,}9$, puis

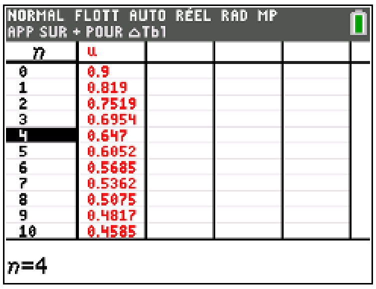
$T_1 = T_0 - 0{,}T_0^2 = 0{,}9 - 0{,}1 \times 0{,}81 = 0{,}9 - 0{,}081 = 0{,}819$;

$T_2 = T_1 - 0{,}1 \times T_1^2 = 0{,}751924 \approx 0{,}752$;

$T_3 = T_2 - 0{,}1 \times T_2^2 \approx 0{,}695$ et enfin

$T_4 = T_3 - 0{,}1 \times T_3^2 \approx 0{,}647$.

Donc l'estimation de 0,4 est loin du modèle.



0,5 pt

2. On définit la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = x - 0{,}1x^2$.
Ainsi, la suite (T_n) vérifie pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = f(T_n)$.

(a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

La fonction polynôme f est dérivable sur $[0\ ;\ 1]$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 1 - 2 \times 0{,}1x = 1 - 0{,}2x$$

Or $0 \leqslant x \leqslant 1 \iff 0 \leqslant 0{,}2x \leqslant 0{,}2 \iff -0{,}2 \leqslant -0{,}2x \leqslant 0 \iff 0{,}8 \leqslant 1 - 0{,}2x \leqslant 1$, ce qui montre que $f'(x) > 0$ sur $[0\ ;\ 1]$: la fonction f est donc croissante sur $[0\ ;\ 1]$ de $f(0) = 0$ à $f(1) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

0,5 pt

(b) Montrer que pour tout n entier naturel, on a : $0 \leqslant T_{n+1} \leqslant T_n \leqslant 1$.

Initialisation : on a vu que $0 \leq 0{,}819 \leq 0{,}9 \leq 1$ ou $0 \leq T_1 \leq T_0 \leq 1$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;

Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait : $0 \leq T_{n+1} \leq T_n \leq 1$.

Par croissance de la fonction f on a :

$$0 \leq T_{n+1} \leq T_n \leq 1$$

$$\iff f(0) \leq f(T_{n+1}) \leq f(T_n) \leq f(1)$$

$$\iff 0 \leq T_{n+2} \leq T_{n+1} \leq 0{,}9 \leq 1$$

On a donc $0 \leq T_{n+2} \leq T_{n+1} \leq 1$: l'encadrement est vrai au rang $n + 1$.

Conclusion : L'encadrement est vrai au rang 0, et s'il est vrai à un rang n quelconque il est vrai au rang
$n + 1$: d'après le principe de récurrence, quel que soit le naturel n, $0 \leqslant T_{n+1} \leqslant T_n \leqslant 1$.

1 pt

(c) La suite (T_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

On vien de démontrer que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}, T_{n+1} \leq T_n$ donc la suite (T_n) est décroissante
- Pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq T_n \leq 1$ donc la suite (T_n) est bornée (minorée par 0)

0,5 pt

On sait que toute suite décroissante minorée converge donc (T_n) est convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.

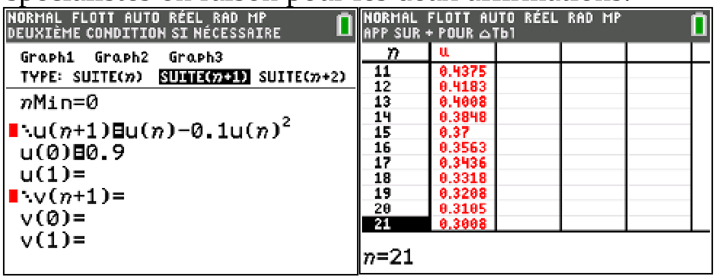
(d) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$.

$T_{n+1} = f(T_n)$ et la fonction f est continue sur $[0\,;1]$, de plus (T_n) converge vers ℓ.
Par conséquent, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
$f(x) = x \iff -0{,}1x^2 + x = x \iff -0{,}1x^2 = 0 \iff x = 0.$
Donc $\ell = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = 0$.

1 pt

(e) Le groupe de spécialistes en environnement affirme que, selon ce modèle, le taux de disponibilité des ressources peut être inférieur à 0,4 au cours des vingt premières années qui suivent le début de l'étude et qu'il est capable de déterminer en quelle année, ce seuil serait atteint pour la première fois.
Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?

La calculatrice donne $T_{13} \approx 0{,}4008 \;\; et \;\; T_{14} \approx 0{,}385$: c'est donc en 2032 que ce seuil sera atteint pour la première fois.
$T_{20} \approx 0{,}31$ donc les spécialistes on raison pour les deux affirmations.



0,5 pt

Partie B - Étude d'un modèle continu d'évolution

Le groupe de biologistes a choisi une autre option et travaille sur le nombre de grenouilles peuplant l'étang. Au 1er janvier 2018, il avait été dénombré 250 grenouilles.
Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$P(t) = \frac{1000}{0{,}4 + 3{,}6\mathrm{e}^{-0{,}5t}}$$

où t est le temps, mesuré en années, écoulé depuis le 1er janvier 2018 (cette fonction découle d'un modèle continu, usuel en biologie, le modèle de Verhulst).

1. Calculer $P'(t)$ où P' est la fonction dérivée de P puis étudier le signe de $P'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$.

Sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction P quotient de fonctions dérivables et de dénominateur strictement positif, est dérivable et sur cet intervalle :

$$P'(t) = -\frac{-0{,}5 \times 3{,}6\mathrm{e}^{-0{,}5t} \times 1000}{(0{,}4 + 3{,}6\mathrm{e}^{-0{,}5t})^2} = \frac{1800\mathrm{e}^{-0{,}5t}}{(0{,}4 + 3{,}6\mathrm{e}^{-0{,}5t})^2}$$

0,5 pt

2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de la fonction P sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

On sait que $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,5t} = 0$, donc $\lim_{t\to+\infty} 0,4 + 3,6\mathrm{e}^{-0,5t} = 0,4$ et enfin $\lim_{t\to+\infty} \frac{1000}{0,4} = 2500$.
$P'(t)$ est un quotient de nombres supérieurs à zéro, on a donc $P'(t) > 0$ sur $[0;+\infty[$.
La fonction P est donc croissante sur $[0;+\infty[$ de $P(0) = \frac{1000}{0,4+3,6} = \frac{1000}{4} = 250$ à $\lim_{t\to+\infty} P(t) = 2500$.

x	0	$+\infty$
$P'(x)$	$+$	
$P(x)$	250 ↗	2500

1 pt

3. Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0 \in [0;+\infty[$ telle que $P(t_0) = 2000$. Déterminer cette valeur à 10^{-1} près.

D'après le résultat précédent, la fonction P est continue, strictement monotone et comme $250 < 2000 < 2500$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réél unique $t_0 \in [0;+\infty[$ tel que $P(t_0) = 2000$.
La calculatrice donne : $P(7,1) \approx 1987$ et $P(7,2) \approx 2007$, donc $7,1 < t_0 < 7,2$.

1 pt

4. Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2000 grenouilles.

On a trouvé à la question précédente qu'au bout d'un temps t_0 compris entre 7,1 et 7,2 années la population aura atteint les 2000 individus, donc durant l'année 2026.

0,5 pt

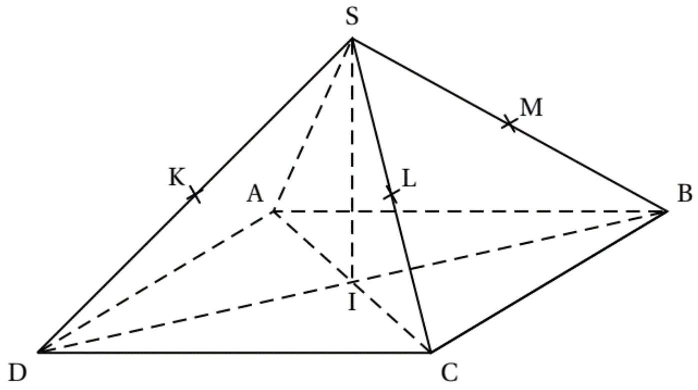
Exercice 3 (6 points)

6×1 pt

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Partie A

SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré ABCD.
On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].



1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires:

a. (DK) et (SD)	b. (AS) et (IC)	**c. (AC) et (SB)**	d. (LM) et (AD)

- $K \in (SD)$ donc (DK) et (SD) sont coplanaires.
- Les points A , S , I et C appartiennent au plan (ASC) donc (AS) et (IC) sont coplanaires.
- $(AS) \in (ASC)$ mais $B \notin (ASC)$ donc (AC) et (SB) ne sont pas coplanaires.
- $(LM) \parallel ((AD)$ donc (LM) et (AD) sont coplanaires.

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $(I\ ;\ \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS}\ )$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants:

$$\mathrm{I}(0\ ;\ 0\ ;\ 0)\ ;\ \mathrm{A}(-1\ ;\ 0\ ;\ 0)\ ;\ \mathrm{B}(0\ ;\ 1\ ;\ 0)\ ;\ \mathrm{C}(1\ ;\ 0\ ;\ 0); \mathrm{D}(0\ ;\ -1\ ;\ 0)\ ;\ \mathrm{S}(0\ ;\ 0\ ;\ 1).$$

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont:

a. $\left(\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\right)$	**b.** $\left(\frac{1}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$	***c.*** $\left(-\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$	***d.*** $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$

K est le milieu de $[SD]$ donc $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ID} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IS} = 0 \times \overrightarrow{IC} - \frac{1}{2} \times \overrightarrow{IB} + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{IS}$ donc $K\left(0\ ;\ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

L est le milieu de $[SC]$ donc $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IS} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{IC} + 0 \times \overrightarrow{IB} + \frac{1}{2} \times \overrightarrow{IS}$ donc $K\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ; \frac{1}{2}\right)$

Le milieu N de $[KL]$ admet donc pour coordonnées $\left(\frac{0+\frac{1}{2}}{2}; \frac{-\frac{1}{2}+0}{2}\ ; \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2}\right)$ soit $\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\ ; \frac{1}{2}\right)$

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont:

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$	***b.*** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$	***c.*** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$	***d.*** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$A(-1\ ;0\ ;0)\ \text{ et }\ S(0\ ;0\ ;1)\ \text{donc}\ \overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}0-(-1)\\0-0\\1-0\end{pmatrix}\ \text{ soit }\ \overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est:

a. $\begin{cases}x &= -1-t\\ y &= t\\ z &= -t\end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$	***b.*** $\begin{cases}x &= -1+2t\\ y &= 0\\ z &= 1+2t\end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$	***c.*** $\begin{cases}x &= t\\ y &= 0\\ z &= 1+t\end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$	***d.*** $\begin{cases}x &= -1-t\\ y &= 1+t\\ z &= 1-t\end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

$\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AS) et $S(0\ ;0\ ;1) \in (AS)$ donc une représentation paramétrique de (AS) s'écrit :

$$\begin{cases}x &= 0+1\times t\\ y &= 0+0\times t\\ z &= 1+1\times t\end{cases}\quad t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}x &= t\\ y &= 0\\ z &= 1+t\end{cases}\quad t \in \mathbb{R}$$

5. La section de la pyramide SABCD par le plan (KML) est :

a. un triangle	***b.*** un rectangle non carré	***c.*** un losange non carré	***d.*** un carré

Par hypothèses et d'après le théorème de Thalès, $(ML) \parallel (BC)$ et $(KL) \parallel (DC)$.
De plus $(DC) \perp (CB)$ donc $(KL) \perp (LM)$.
La section de la pyramide par le plan (KML) est un parallélogramme ayant un angle droit et deux côtés consécutifs égaux : c'est un carré.

Partie B

6. On considère le programme ci-dessous écrit en langage Python :

```
def valeurs() :
    u = 2
    v = 1
    for k in range(1,11) :
        c = u
        u = u + 3*v
        v = c + v
    return (u, v)
```

Ce programme renvoie :

a. u_{11} et v_{11} ;	**b.** u_{10} et v_{10} ;	**c.** les valeurs de u_n et v_n pour n allant de 1 à 10;	**d.** u_0 et v_{10}.

```
def valeurs():
    u=2
    v=1
    for k in range(1,11):
        c=u
        u=u+3*v
        v=c+v
        print("u=",u,"v=",v,"k=",k)
    return(u,v)
```

```
>>> (executing cell "" (
1 of "<tmp 1>"))

>>> valeurs()
u= 5 v= 3 k= 1
u= 14 v= 8 k= 2
u= 38 v= 22 k= 3
u= 104 v= 60 k= 4
u= 284 v= 164 k= 5
u= 776 v= 448 k= 6
u= 2120 v= 1224 k= 7
u= 5792 v= 3344 k= 8
u= 15824 v= 9136 k= 9
u= 43232 v= 24960 k= 10
(43232, 24960)
```