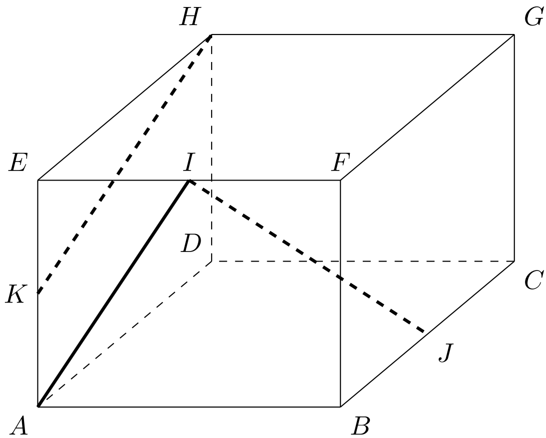
Devoir de 2 heures du 15/11/2022.

Exercice 1.

On considère un cube $ABCDEFGH$. Le point I est le milieu du segment $[EF]$, le point J est le milieu du segment $[BC]$ et le point K est le milieu du segment $[AE]$.



Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(A~;~\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. (a) Donner les coordonnées des points I et J.

   (b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires. *Autrement dit démontrer que l'un des vecteurs est combinaison linéaire des deux autres.*

On considère les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+t \\ y & = & 8-2t \\ z & = & -2+3t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4+t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 8+2t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}.$$

2. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

3. Le point $L(4~;~0~;~3)$ est-il un point de d_1 ?

Exercice 2.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x - 2.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On note f' sa dérivée et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. (a) Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, on a $f'(x) = \ln(x)$.

   (b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = \mathrm{e}$.

2. *Question indépendante de ce qui précède.* Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\ln(x^2 + 1) > 8$.

Exercice 3.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0{,}6 \\ u_{n+1} & = & 0{,}75u_n\,(1 - 0{,}15u_n) \end{cases}$$

pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par

$$f(x) = 0{,}75x(1 - 0{,}15x).$$

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et dresser son tableau de variations.

3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.

4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

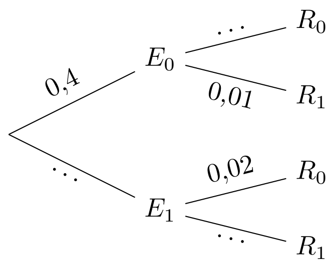
   (c) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

Exercice 4.

On considère un système de communication binaire transmettant des 0 et des 1. Chaque 0 ou 1 est appelé bit. En raison d'interférences, il peut y avoir des erreurs de transmission : un 0 peut être reçu comme un 1 et, de même, un 1 peut être reçu comme un 0.

Pour un bit choisi au hasard dans le message, on note les évènements :

- E_0 : « le bit envoyé est un 0 » ;
- E_1 : « le bit envoyé est un 1 » ;
- R_0 : « le bit reçu est un 0 »
- R_1 : « le bit reçu est un 1 ».



On sait que :
$p(E_0) = 0{,}4$; $\quad p_{E_0}(R_1) = 0{,}01$; $\quad p_{E_1}(R_0) = 0{,}02$.
On rappelle que la probabilité conditionnelle de A sachant B est notée $p_B(A)$.
On peut ainsi représenter la situation par l'arbre de probabilités ci-dessus.

1. La probabilité que le bit envoyé soit un 0 et que le bit reçu soit un 0 est égale à :

   a. 0,99 **b.** 0,396 **c.** 0,01 **d.** 0,4

2. La probabilité $p(R_0)$ est égale à :

   a. 0,99 **b.** 0,02 **c.** 0,408 **d.** 0,931

3. Une valeur, approchée au millième, de la probabilité $p_{R_1}(E_0)$ est égale

   a. 0,004 **b.** 0,001 **c.** 0,007 **d.** 0,010

4. La probabilité de l'évènement « il y a une erreur de transmission » est égale à :

   a. 0,03 **b.** 0,016 **c.** 0,16 **d.** 0,015

Un message de longueur huit bits est appelé un octet.

On admet que la probabilité qu'un octet soit transmis sans erreur est égale à 0,88.

5. On transmet successivement 10 octets de façon indépendante.
   La probabilité, à 10^{-3} près, qu'exactement 7 octets soient transmis sans erreur est égale à :

a. 0,915 **b.** 0,109 **c.** 0,976 **d.** 0,085

6. On transmet successivement 10 octets de façon indépendante.
   La probabilité qu'au moins 1 octet soit transmis sans erreur est égale à :

   a. $1 - 0{,}12^{10}$ **b.** $0{,}12^{10}$ **c.** $0{,}88^{10}$ **d.** $1 - 0{,}88^{10}$

7. Soit N un entier naturel. On transmet successivement N octets de façon indépendante.
   Soit N_0 la plus grande valeur de N pour laquelle la probabilité que les N octets soient tous transmis sans erreur est supérieure ou égale à 0,1.
   On peut affirmer que :

   a. $N_0 = 17$ **b.** $N_0 = 18$ **c.** $N_0 = 19$ **d.** $N_0 = 20$