Devoir de 2 heures du 15/11/2022.

Exercice 1.

1. (a) Déterminons les coordonnées de I et J.

*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} \\ &= \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} \\ &= \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + 0\cdot\overrightarrow{AD} + 1\cdot\overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

$$\boxed{I\left(\tfrac{1}{2};0;1\right).}$$

* De même :

$$\boxed{J\left(1;\tfrac{1}{2};0\right)}$$

(b) Démontrons que $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas linéairement indépendants.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BJ} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) - \overrightarrow{AE} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{IJ}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\boxed{\overrightarrow{IJ},\ \overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont coplanaires.}}$$

2. Démontrons que d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

   Rappelons que deux droites sont parallèles si et seulement si n'importe quel vecteur directeur de l'une est colinéaire à n'importe quel vecteur directeur de l'autre.

   Clairement $\vec{u}_1\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs respectivement de d_1 et d_2.
   On remarque en considérant les deux premières coordonnées de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix} &= 1\times 1-(-2)\times 1\\ &= 3\end{aligned}$$

   Donc $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires et

$$\boxed{d_1 \text{ et } d_2 \text{ ne sont pas parallèles.}}$$

3. Démontrons que $L \notin d_1$.

   Si $L \in d_1$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} 3+t & = & 4\\ 8-2t & = & 0\\ -2+3t & = & 3\end{cases}.$$

   Nécessairement $t = 4-3 = 1$ est la seul solution possible d'après la première équation.
   Mais $t = 1$ n'est pas solution de la seconde équation donc ce système n'a pas de solution.

$$\boxed{L \notin d_1.}$$

Exercice 2.

1. (a) Déterminons f'.

   $h : x \mapsto x\ln(x)$ est de la forme uv où $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v = \ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $h = uv$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{x}.$$

Or $(uv)' = u'v + uv'$ donc, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} \\ &= \ln(x) + 1 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$f'(x) = \ln(x) + 1 - 1 + 0$$

Enfin :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \ln(x).}$$

(b) Déterminons une équation de T.

$$T:\ y = f'(\mathrm{e}) \times (x - \mathrm{e}) + f(\mathrm{e}).$$

Or

- $f'(\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}) = 1$.
- $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) - \mathrm{e} - 2 = -2$

donc

$$\boxed{T:\ y = x - \mathrm{e} - 2.}$$

2.

$$\ln(x^2 + 1) > 8 \iff x^2 + 1 - \mathrm{e}^8 > 0$$

Puisque $\mathrm{e}^8 - 1 > 0$ nous pouvons noter $\alpha = \sqrt{-1 + \mathrm{e}^8}$ et alors :

$$\ln(x^2 + 1) > 8 \iff (x - \alpha)(x + \alpha) > 0$$

x	$-\infty$		$-\alpha$		α		$+\infty$
$x-\alpha$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+\alpha$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2-\alpha^2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est
$]-\infty,-\alpha[\cup]\alpha,+\infty[$.

Exercice 3.

1.

$$\begin{aligned} u_1 &= 0{,}75u_0(1-0{,}15u_0) \\ &= 0{,}75\times 0{,}6(1-0{,}15\times 0{,}6) \end{aligned}$$

$u_1 = 0{,}4095.$

2. Étudions les variations de f.

   En développant :
   $$f(x) = -0{,}1125x^2 + 0{,}75x.$$

   f est une fonction polynomiale donc dérivable sur $[0;1]$ et sa dérivée est, pour tout $x \in [0;1]$:
   $$f'(x) = -0{,}225x + 0{,}75.$$

   f' est une fonction affine dont le coefficient directeur est strictement négatif et qui s'annule en $\frac{10}{3}$ donc $f' > 0$ sur $[0;1]$.

x	0	1
f	0 $\nearrow$	$0{,}637\,5$

3. Résolvons l'équation proposée.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 0{,}75x(1-0{,}15x) = x \\ &\iff x\left[0{,}75(1-0{,}15x)-1\right] = 0 \\ &\iff x(-0{,}1125x-0{,}25) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{20}{9} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation dans } [0;1] \text{ est } \{0\}.}$$

4. (a) Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ ».

   * $u_0 = 0{,}6$ et $u_1 = 0{,}4095$ donc clairement $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   * Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$.
     D'après l'hypothèse de récurrence :

     $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1.$$

     f étant croissante sur $[0;1]$ nous en déduisons :

     $$f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1).$$

     Autrement dit :

     $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}6375.$$

     Et puisque 0,6375 finalement $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   * Nous avons démontré par récurrence que

     $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1.}$$

   (b) Nous avon démontré à la question précédente que (u_n) est décroissante est minorée par 0 donc

   $$\boxed{(u_n) \text{ est convergente.}}$$

(c) La fonction f est continue, car polynomiale, $f(u_n) = u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et (u_n) converge vers un réel ℓ donc, en passant à la limite

$$f(\ell) = \ell.$$

Comme $0 \leqslant \ell \leqslant 1$, d'après la question 3, $\ell = 0$.

(u_n) converge vers 0.

Exercice 4.

1. Réponse **b**.
2. Réponse **c**.
3. Réponse **c**.
4. Réponse **b**.
5. Réponse **d**.
6. Réponse **a**.
7. Réponse **b**.