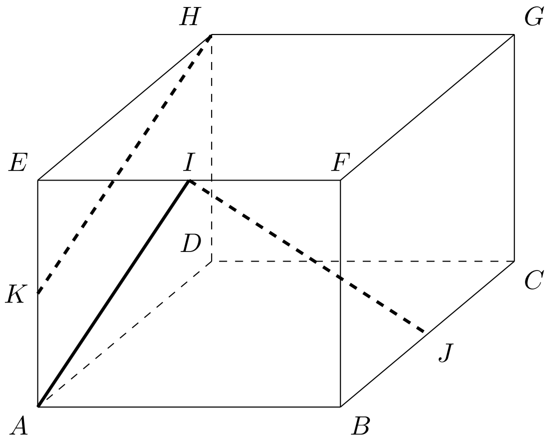
# Devoir de 2 heures du 15/11/2022.

## Exercice 1.

On considère un cube $ABCDEFGH$. Le point $I$ est le milieu du segment $[EF]$, le point $J$ est le milieu du segment $[BC]$ et le point $K$ est le milieu du segment $[AE]$.




Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. (a) Donner les coordonnées des points $I$ et $J$.

   Déterminons les coordonnées de $I$ et $J$.

   *

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} \\ &= \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} \\ &= \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD} + 1 \cdot \overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

$$\boxed{I\left(\tfrac{1}{2}; 0; 1\right).}$$

* De même :

$$\boxed{J\left(1;\tfrac{1}{2};0\right)}$$

(b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires. *Autrement dit démontrer que l'un des vecteurs est combinaison linéaire des deux autres.*

Démontrons que $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas linéairement indépendants.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BJ}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) - \overrightarrow{AE}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{IJ}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\boxed{\overrightarrow{IJ},\ \overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont coplanaires.}}$$

On considère les droites $d_1$ et $d_2$ définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3+t\\ y &=& 8-2t\\ z &=& -2+3t\end{array}\right., t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4+t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 8+2t\end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

2. Les droites $d_1$ et $d_2$ sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

   Démontrons que $d_1$ et $d_2$ ne sont pas parallèles.

   Rappelons que deux droites sont parallèles si et seulement si n'importe quel vecteur directeur de l'une est colinéaire à n'importe quel vecteur directeur de l'autre.

   Clairement $\vec{u}_1\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs respectivement de $d_1$ et $d_2$.

On remarque en considérant les deux premières coordonnées de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \times 1 - (-2) \times 1 \\ &= 3\end{aligned}$$

Donc $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires et

$d_1$ et $d_2$ ne sont pas parallèles.

3. Le point $L(4\ ;\ 0\ ;\ 3)$ est-il un point de $d_1$ ?

   Démontrons que $L \notin d_1$.

   Si $L \in d_1$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

   $$\begin{cases} 3 + t & = & 4 \\ 8 - 2t & = & 0 \\ -2 + 3t & = & 3 \end{cases}.$$

   Nécessairement $t = 4 - 3 = 1$ est la seul solution possible d'après la première équation.
   Mais $t = 1$ n'est pas solution de la seconde équation donc ce système n'a pas de solution.

   $L \notin d_1$.

## Exercice 2.

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x - 2.$$

On admet que la fonction $f$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On note $f'$ sa dérivée et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. (a) Démontrer que, pour tout $x$ appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, on a $f'(x) = \ln(x)$.

   Déterminons $f'$.

   $h : x \mapsto x\ln(x)$ est de la forme $uv$ où $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$.

$u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v = \ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $h = uv$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{x}.$$

Or $(uv)' = u'v + uv'$ donc, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} \\ &= \ln(x) + 1 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$f'(x) = \ln(x) + 1 - 1 + 0$$

Enfin :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \ln(x).}$$

(b) Déterminer une équation de la tangente $T$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = \mathrm{e}$.

Déterminons une équation de $T$.

$$T :\ y = f'(\mathrm{e}) \times (x - \mathrm{e}) + f(\mathrm{e}).$$

Or

- $f'(\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}) = 1$.
- $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) - \mathrm{e} - 2 = -2$

donc

$$\boxed{T :\ y = x - \mathrm{e} - 2.}$$

2. *Question indépendante de ce qui précède.* Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\ln(x^2 + 1) > 8$.

$$\ln(x^2 + 1) > 8 \iff x^2 + 1 - \mathrm{e}^8 > 0$$

Puisque $\mathrm{e}^8 - 1 > 0$ nous pouvons noter $\alpha = \sqrt{-1 + \mathrm{e}^8}$ et alors :

$$\ln(x^2 + 1) > 8 \iff (x - \alpha)(x + \alpha) > 0$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\alpha$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-\alpha$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x+\alpha$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^2-\alpha^2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

L'ensemble des solutions de l'inéquation est
$]-\infty, -\alpha[\cup]\alpha, +\infty[$.

## Exercice 3.

On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0{,}6 \\ u_{n+1} & = & 0{,}75u_n\left(1-0{,}15u_n\right) \end{array}\right.$$

pour tout entier naturel $n$.

1. Calculer $u_1$.

$$\begin{aligned} u_1 &= 0{,}75u_0(1-0{,}15u_0) \\ &= 0{,}75\times 0{,}6(1-0{,}15\times 0{,}6) \end{aligned}$$

$u_1 = 0{,}4095.$

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~1]$ par

$$f(x) = 0{,}75x(1-0{,}15x).$$

2. Montrer que la fonction $f$ est croissante sur l'intervalle $[0~;~1]$ et dresser son tableau de variations.

   Étudions les variations de $f$.

   En développant :
$$f(x) = -0{,}1125x^2 + 0{,}75x.$$

$f$ est une fonction polynomiale donc dérivable sur $[0;1]$ et sa dérivée est, pour tout $x \in [0;1]$ :

$$f'(x) = -0{,}225x + 0{,}75.$$

$f'$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est strictement négatif et qui s'annule en $\frac{10}{3}$ donc $f' > 0$ sur $[0;1]$.

| $x$ | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $0{,}637\,5$ |

3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.

Résolvons l'équation proposée.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 0{,}75x(1-0{,}15x) = x \\ &\iff x\left[0{,}75(1-0{,}15x)-1\right] = 0 \\ &\iff x(-0{,}1125x - 0{,}25) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{20}{9} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation dans $[0;1]$ est $\{0\}$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ : « $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ ».

* $u_0 = 0{,}6$ et $u_1 = 0{,}4095$ donc clairement $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. D'après l'hypothèse de récurrence :

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1.$$

$f$ étant croissante sur $[0;1]$ nous en déduisons :

$$f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1).$$

Autrement dit :

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}6375.$$

Et puisque 0,6375 finalement $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

* Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1.}$$

(b) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

Nous avon démontré à la question précédente que $(u_n)$ est décroissante est minorée par 0 donc

$$\boxed{(u_n) \text{ est convergente.}}$$

(c) Déterminer la limite $\ell$ de la suite $(u_n)$.

La fonction $f$ est continue, car polynomiale, $f(u_n) = u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(u_n)$ converge vers un réel $\ell$ donc, en passant à la limite

$$f(\ell) = \ell.$$

Comme $0 \leqslant \ell \leqslant 1$, d'après la question 3, $\ell = 0$.

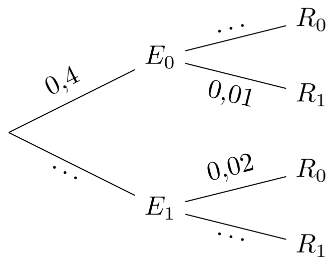
$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0.}$$

## Exercice 4.

On considère un système de communication binaire transmettant des 0 et des 1. Chaque 0 ou 1 est appelé bit. En raison d'interférences, il peut y avoir des erreurs de transmission : un 0 peut être reçu comme un 1 et, de même, un 1 peut être reçu comme un 0.

Pour un bit choisi au hasard dans le message, on note les évènements :

- $E_0$ : « le bit envoyé est un 0 » ;
- $E_1$ : « le bit envoyé est un 1 » ;
- $R_0$ : « le bit reçu est un 0 »
- $R_1$ : « le bit reçu est un 1 ».




On sait que :
$p(E_0) = 0{,}4$ ;    $p_{E_0}(R_1) = 0{,}01$ ;    $p_{E_1}(R_0) = 0{,}02$.
On rappelle que la probabilité conditionnelle de $A$ sachant $B$ est notée $p_B(A)$.
On peut ainsi représenter la situation par l'arbre de probabilités ci-dessus.

1. La probabilité que le bit envoyé soit un 0 et que le bit reçu soit un 0 est égale à :

   **a.** 0,99    **b.** 0,396    **c.** 0,01    **d.** 0,4

   Réponse **b.**

2. La probabilité $p(R_0)$ est égale à :

   **a.** 0,99    **b.** 0,02    **c.** 0,408    **d.** 0,931

   Réponse **c.**

3. Une valeur, approchée au millième, de la probabilité $p_{R_1}(E_0)$ est égale

   **a.** 0,004    **b.** 0,001    **c.** 0,007    **d.** 0,010

   Réponse **c.**

4. La probabilité de l'évènement « il y a une erreur de transmission » est égale à :

   **a.** 0,03    **b.** 0,016    **c.** 0,16    **d.** 0,015

   Réponse **b.**

Un message de longueur huit bits est appelé un octet.

On admet que la probabilité qu'un octet soit transmis sans erreur est égale à 0,88.

5. On transmet successivement 10 octets de façon indépendante.
   La probabilité, à $10^{-3}$ près, qu'exactement 7 octets soient transmis sans erreur est égale à :

   **a.** 0,915 **b.** 0,109 **c.** 0,976 **d.** 0,085

   Réponse **d.**

6. On transmet successivement 10 octets de façon indépendante.
   La probabilité qu'au moins 1 octet soit transmis sans erreur est égale à :

   **a.** $1 - 0{,}12^{10}$ **b.** $0{,}12^{10}$ **c.** $0{,}88^{10}$ **d.** $1 - 0{,}88^{10}$

   Réponse **a.**

7. Soit $N$ un entier naturel. On transmet successivement $N$ octets de façon indépendante.
   Soit $N_0$ la plus grande valeur de $N$ pour laquelle la probabilité que les $N$ octets soient tous transmis sans erreur est supérieure ou égale à 0,1.
   On peut affirmer que :

   **a.** $N_0 = 17$ **b.** $N_0 = 18$ **c.** $N_0 = 19$ **d.** $N_0 = 20$

   Réponse **b.**