

1010

14,5
20

Exercice 1

1) Calcul de la probabilité de l'événement $M \cap T$

$$P(M \cap T) = P_M(T) \times P(M)$$

$$= 0,07 \times 0,1$$

$$= \underline{0,007}$$

2) On a : $P(\bar{T}) = 1 - 0,07 = 0,93$

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$$

$$= P_M(T) \times P(M) + P_{\bar{M}}(T) \times P(\bar{M})$$

$$= 0,007 + 0,93 \times 0,01$$

$$= \underline{0,0093}$$

3) Dans un contexte de dépistage, il est plus pertinent de connaître $P_T(M)$.

4) On veut $P_T(M)$

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$$

$$= \frac{0,007}{0,0093}$$

$$\approx \underline{0,75}$$

5) a) Montrons que X suit une loi binomiale.

Épreuve de Bernoulli :

"Vérifier que la personne a un test positif" est une épreuve de Bernoulli

Succès : "la personne a un test positif"

$$p = 0,0093$$

#schéma de Bernoulli

X compte le nombre d'individu ayant un test positif

$$p = 0,0653$$

l'épreuve est répétée $n = 10$ fois de façon identique et indépendante

X suit une loi Binomiale telle que : $X \sim B(10; 0,0653)$

6) On veut la probabilité que 2 personnes aient un test positif, soit $P(X=2)$:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1-0,0653)^{10-2}$$

$$P(X=2) \approx 0,11$$

6) On veut la valeur minimale de X, pour laquelle la probabilité est strictement supérieure à 0,99

À l'aide de la calculatrice,

$$\text{On voit que } P(X=3) = 0,9972$$

$$0,99 < 0,9972$$

Donc il faudrait au moins tester 3 personnes

Exercice 2I] On a $U_0 = -19$

Calcul de "il" augmentation de la température en 1 minute :

$$-19 - 1,3 = -20,3$$

Donc en 10 minutes, la température a augmenté de $20,3^\circ\text{C}$.Calcul du taux d'augmentation de la température en 1 minute :

$$1 \times 20,3 \div 10 = 2,03$$

$$\text{Donc } U_{10} = -19 + 10 \times 2,03 = 1,3$$

On veut la température des gâteaux 25 minutes après leur sortie du congélateur

$$\text{Soit } U_{25} = -19 + 25 \times 2,03 = 31,75$$

0,5 Ce modèle ne semble pas pertinent. car?

$$\text{II] On a } T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$$

$$T_{n+1} = -0,06(T_n - 25) + T_n$$

$$T_{n+1} = -0,06T_n + 0,06 \times 25 + T_n$$

$$T_{n+1} = -0,06T_n + T_n + 1,5$$

$$T_{n+1} = \underline{0,94T_n + 1,5}$$

$$2) T_1 = T_{0+1} = 0,94T_0 + 1,5$$

$$= 0,94 \times (-19) + 1,5$$

$$\cancel{= -16,4}$$

$$T_2 = T_{1+1} = 0,94T_1 + 1,5$$

$$= 0,94 \times (-16,36) + 1,5$$

$$\cancel{= -13,9}$$

3) Montrons $P(n): "T_n \leq 25"$

Démontrons par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie

Initialisation:

* $T_0 = -19 \leq 25$ -

Donc $P(0)$ est vraie -

Hérédité:

* Soit $n \in \mathbb{N}$ -

Supposons que $P(n)$ est vraie et démontrons que $P(n+1)$ est vraie
D'après l'hypothèse de récurrence:

$T_{n+1} \leq 25$ Si c'est vrai, alors $P(n+1)$ est vraie et c'est fini.

$T_n \times 0,94 \leq 25 \times 0,94 \rightarrow \text{car } \dots$

$0,94T_n + 1,5 \leq 23,5 + 1,5$ -

$0,94T_n + 1,5 \leq 25$ -

$T_{n+1} \leq 25$ -

Donc $P(n+1)$ est vraie -

On a démontré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \leq 25$ -

4) Étudions le sens des variations de (T_n) :

On sait que si $U_{n+1} > U_n$, alors la suite est strictement croissante.

Notons $P(n): "U_{n+1} > U_n"$

Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie

Initialisation:

* $T_0 \leq T_1 \Leftrightarrow -19 \leq -16,4$ -

Donc $P(0)$ est vraie

Hérédité:

* Soit $n \in \mathbb{N}$ -

Supposons que $P(n)$ est vraie et démontrons que $P(n+1)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence:

$U_{n+1} > U_n$

illisible $U_{n+1} > U_n \rightarrow \text{à prouver.}$

$U_{n+1} \times 0,94 + 1,5 > U_n \times 0,94 + 1,5$ car $0,94 > 0$.

$0,94U_{n+1} + 1,5 > 0,94U_{n+1} + 1,5$

$U_{n+2} > U_{n+1}$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

101

On a démontré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$.

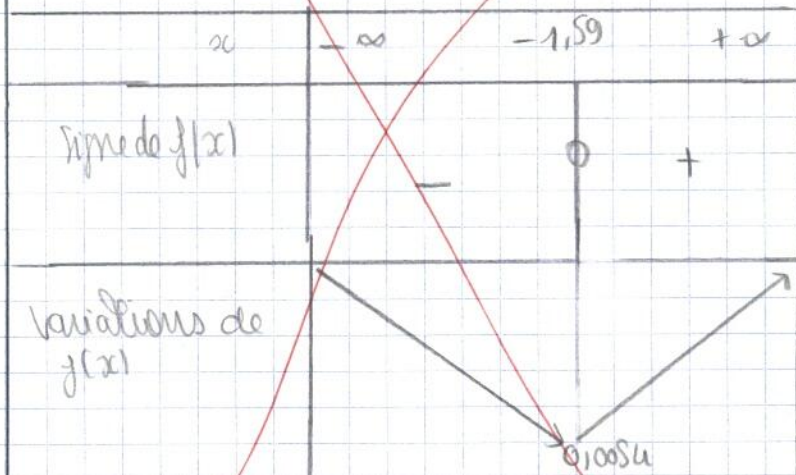
Donc la suite est ~~strictement~~ croissante.

Tableau de variation :

$$f(x) = 0,94x + 1,5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1,59$$

x	$-\infty$	$-1,59$	$+\infty$
signe de $f(x)$		0	+
variations de $f(x)$			



5) À l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que la suite (T_n) converge vers 25.

$$6) a) u_n = T_n - 25$$

$$u_0 = T_0 - 25$$

$$u_0 = -19 - 25$$

$$u_0 = -44$$

$$u_1 = T_1 - 25$$

$$u_1 = -16,36 - 25$$

$$u_1 = -41,36$$

$$u_2 = T_2 - 25$$

$$= -38,87 - 25$$

$$= -63,87$$

Montrons que u_n est géométrique

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{-41,36}{-44} = 0,94$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{-63,87}{-41,36} = 0,94$$

0,25 donc c'est une suite géométrique de raison 0,94

6) La formule explicite d'une suite géométrique est : $U_0 \times q^n = ?$

Donc $T_0 \times q^n = ?$

$$= -44 \times 0,94^n$$

$$\text{et } U_n = T_n - 25$$

$$\text{Donc } U_n = -44 \times 0,94^n - 25$$

c) limite de (T_n) :

$$T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$$

en passant à la limite.

En remplaçant T_{n+1} et T_n par l dans la formule de récurrence:

$$l = 0,94l + 1,5$$

$$l - 0,94l = 1,5$$

$$0,06l = 1,5$$

$$l = \frac{1,5}{0,06}$$

$$l = 25$$

7) a) Une demi-heure correspond à 30 minutes, donc on a:

$$T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25$$

$$= 18,12 \approx 18$$

La température atteinte est de 18°C .

b) d'après la calculatrice, pour $n = 10^6$, $T(n) = 48,699$ (min)

Donc elle devrait dépasser rapidement notre 48 et 49 minutes ($48 < 48,699 < 49$)

c) def seuil():

$$n = 0$$

$$T = -44$$

while $T < 10$:

$$T = -44 \times 0,94^n + 25$$

$$n = n + 1$$

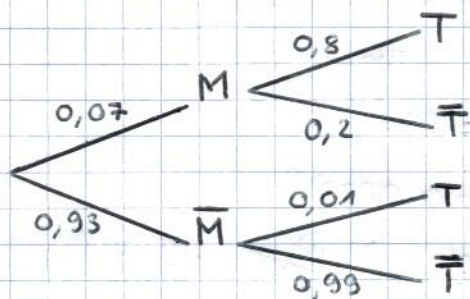
return n

$$\frac{8}{20}$$

Exercice 1 :

1)

0,5

Calculons la probabilité de l'événement $M \cap T$.

D'après la loi des probabilités composées on a :

$$\begin{aligned} P(M \cap T) &= P(M) \times P(T) \\ &= 0,07 \times 0,8 \\ &= 0,056 \end{aligned}$$

2) La probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif est de 0,0653.

En effet, d'après la loi de probabilités totale, on a :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) \\ &= (0,07 \times 0,8) + (0,93 \times 0,01) \quad \text{Parenthèses inutiles} \\ &= 0,0653 \end{aligned}$$

3) Il est plus pertinent de connaître $P_T(M)$, soit la probabilité que le test soit positif sachant qu'elle est malade.4) Calculons $P_T(M)$

D'après la loi de probabilités conditionnelles :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,056}{0,0653}$$

$$P_T(M) = 0,857$$

5) a) On choisit des personnes au hasard dans la population et une épreuve de Bernoulli.

• Son succès est : "le test est positif"

• $p = 0,0653$

L'épreuve de Bernoulli est répétée 10 fois de façon indépendante et à l'identique.

Cet épreuve est un schéma de Bernoulli de paramètre $n = 10$ et $p = 0,0653$

1

Donc $X \rightarrow B(n; p)$ avec $n = 10$ et $p = 0,0653$.

b) $P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$ ou ...

$P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1-0,0653)^{10-2}$

$= \frac{10!}{2!(10-2)!} \times 0,0653^2 \times (1-0,0653)^8$

$\approx 45 \times 0,004 \times 0,583$

) Pas de calcul

intermédiaire.

$P(X = 2) \approx 0,11$

0,75

6) $P(X > 0,99) = P(X > 0,99)$

$= P(X < 0,98)$

$P(X > 0,99) = 0,50$

Il faut tester au moins 50 personnes

Exercice 2 :

1^{er} modèle $-19 + 25 = 6$ La température serait de 6°C après 25 min.
Ce modèle n'est pas très pertinent, il faut utiliser les suites.

2^e modèle

1)

2) Calculons T_1 et T_2

$T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5$

$T_1 \approx -16,4$

$T_2 \approx 0,94 \times (-16,4) + 1,5$

$T_2 \approx -13,9$

2

1080

3) Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leq 25$.

Notons $P(n) = "T_n \leq 25"$.

* Initialisation

D'une part $T_n \leq 25$ *il faut le montrer.*

D'autre part $T_0 = -19$.

0,5 Donc $T_0 = -19$ $-19 \leq 25$ $P(0)$ est donc vraie.

* Hérité :

Soit $n \in \mathbb{N}$,

Supposons que $P(n)$ soit vraie et démontrons $P(n+1)$.

D'après l'hypothèse de récurrence, et d'après l'énoncé :

$$T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$$

$$T_{n+1} \leq 25$$

$$0,94T_n + 1,5 \leq 25$$

$$0,94T_n \leq 25 - 1,5$$

$$0,94T_n \leq 23,5$$

$$T_n \leq \frac{23,5}{0,94}$$

$$T_n \leq 25$$

Il faut faire cet enchaînement dans l'autre sens.

Ainsi on a démontré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \leq 25$

Où ce résultat était prévisible. *en...*

4) D'après l'énoncé, $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$

$$T_{n+1} - T_n = 0,06(T_n - 1,5)$$

$$T_{n+1} - T_n = T_n \times \frac{-1,5}{-0,06}$$

$$T_{n+1} - T_n = 25$$

La suite est croissante car $T_n \geq T_{n+1}$

5) A l'aide de la calculatrice nous pouvons conjecturer que la suite (T_n) est croissante et majorée par 25, donc elle converge d'après le théorème de la monotonie des suites.

$$6. U_n = T_n - 25$$

$$a) V_n = V_0 \times q^n \text{ con?}$$

$$c) T_n = -44 \times 0,94^n + 25$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -44 = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = +\infty$$

par produit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -44 \times 0,94^n = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 25 = +\infty$$

par somme = forme Indeterminé

Donc,

$$T_n = 0,94^n \left(\frac{-44}{0,94^n} \times 0,94^n \times \frac{25}{0,94^n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 0$$

Au bout de n minutes, la température s'arrêtera à 0 degrés.

$$7) T_n = -44 \times 0,94^n + 25$$

$$= -44 \times 0,94^{\frac{1}{2}} + 25$$

$$T_n \approx 18$$

La température est de 18°C

$$b) [14, 20]$$

c) def seuil()

$n = 0$

$T = 0$

while $T \neq 10$:

$T = n$

$n = n + 1$

return n

Jeu di 29 Septembre 2022

1090

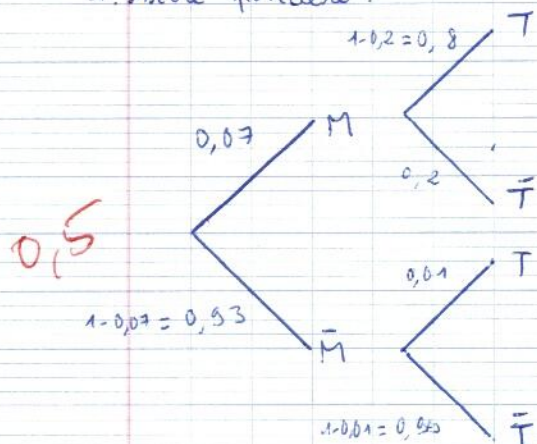
Doc Blanc: Math

Ne justifiez pas en parlant d'expérience aléatoire à tout bout de champ.

$$\frac{13,75}{20}$$

Exercice 1

1. Arbre pondéré:



$$IP(M) = 1 - IP(\bar{M})$$

$$IP(T) = 1 - IP(\bar{T})$$

Cette formule est vraie car nous sommes dans une expérience aléatoire et nous supposons que $IP(M) + IP(\bar{M}) = 1$

« 7% des habitants sont affectés par une maladie »

« Pour les individus malade, 20% des cas sont négatifs »

« Pour les individus sains, 1% est positif »

D'après la formule des probabilités composées on a:

$$IP(M \cap T) = IP(M) \times IP_M(T)$$

$$IP(M \cap T) = 0,07 \times 0,8$$

$$IP(M \cap T) = 0,056$$

2. Calculons $IP(T)$

D'après la formule des probabilités totales on a:

$$IP(T) = IP(T \cap M) + IP(T \cap \bar{M})$$

Cela est vraie uniquement pour une expérience aléatoire.

D'après la formule des probabilités composées on a:

$$IP(T \cap \bar{M}) = IP(\bar{M}) \times IP_{\bar{M}}(T)$$

$$IP(T \cap \bar{M}) = 0,93 \times 0,01 = 0,0093$$

1

$$IP(T) = 0,056 + 0,0093 = 0,0653$$

3. ~~Il est plus pertinent de connaître $IP_n(T)$ puisque le but d'un dépistage c'est de savoir si on dispose de la maladie, souvent réalisé lorsque nous sommes malades mais ce n'est pas intéressant de~~

✓ Il est plus pertinent de connaître $IP_T(M)$ puisqu'il mesure l'efficacité du dépistage.

4. Calculons $IP_T(M)$

D'après la ~~la~~ formule des probabilités conditionnelles et que cette épreuve est une expérience aléatoire on a :

$$IP_T(M) = \frac{IP(M \cap T)}{IP(T)} \quad \text{avec } IP(T) \neq 0$$

$$IP_T(M) = \frac{0,056}{0,0653}$$

2

$$IP_T(M) \approx 0,86 \quad \text{arrondi au } 10^{-2} \text{ près.}$$

3.a) Justifions une loi de probabilité X ?

« avoir un test positif ou non »

succès : avoir un test positif

$$p = 0,0653$$

C'est un schéma de Bernoulli répétée $n = 10$ fois de façon identiques et indépendantes.

X compte le nombre d'individus ayant un test positif, i.e. de succès donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10; 0,0653)$.

1

e) Calculons $IP(X = 2)$

X suit une loi binomiale alors on peut utiliser la formule :

$$IP(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$IP(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^{10-2}$$

1090

1+ $\boxed{P(X=2) \approx 0,11}$ arrondi au 10^{-2} près

6. Calculons $P(X=1) < 1-0,99$

~~X suit une loi binomiale~~: $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; 0,0653)$

$P(X=1) < 0,01$

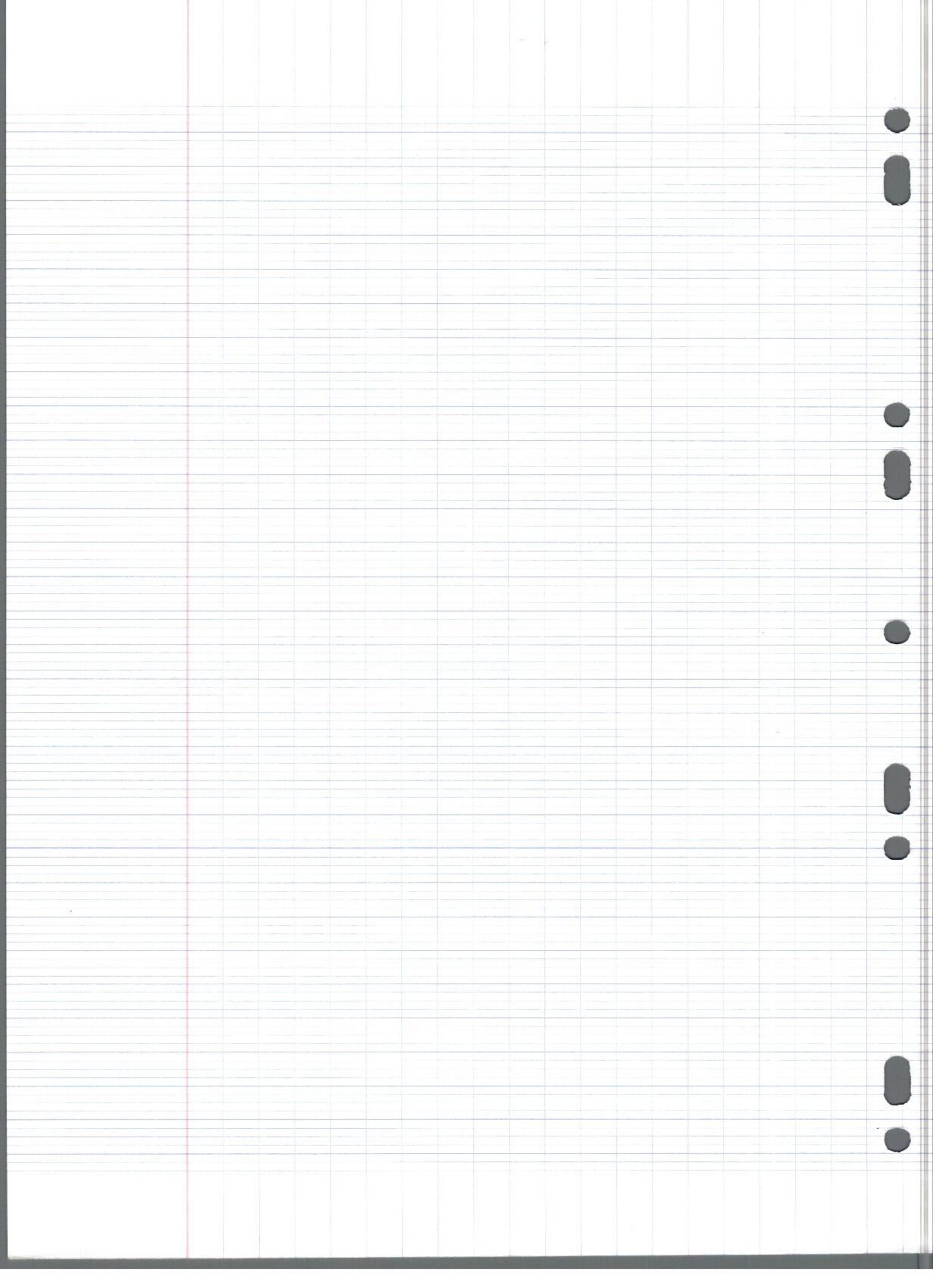
À l'aide de table sur la calculatrice je trouve :

binom Fdp $(n; 0,0653; 1) < 0,01$

binom Fdp $(n \geq 97; 0,0653; 1) < 0,01$

$\boxed{n = 97}$

Le nombre minimum de personnes à tester est 97.



jeudi 29 Septembre 2022

Bac Blanc : Math

Exercice 2

1. justifications : $T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$

$$T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$$

$$T_{n+1} - T_n = -0,06 \times T_n + 1,5$$

$$T_{n+1} - T_n + 0,06T_n = 1,5$$

$$T_{n+1} - 0,94T_n = 1,5$$

$$T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$$

2. Calculons T_1 et T_2

$$T_0 = -19$$

$$T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$$

$$T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5 = -16,36$$

$$T_1 \approx -16,4 \quad \text{arrondi au } 10^{-1} \text{ près.}$$

$$T_2 = 0,94 \times (-16,36) + 1,5 = -13,8784$$

$$T_2 \approx -13,9$$

3. Démontrons par récurrence, pour tout entier naturel n ,
on a $T_n \leq 25$:

Potons $P(n)$: « $T_n \leq 25$ » pour tout n entier naturel

Calculons $P(0)$:

* D'une part : $T_0 = -19$

D'autre part $-19 \leq 25$

donc $T_0 \leq 25$

$P(0)$ est vraie

* ~~Soit m tel que $P(m)$ est vraie~~, démontrons $P(m+1)$

D'après l'hypothèse de récurrence $T_m \leq 25$ on a :

$$0,94 T_m \leq 0,94 \times 25 \quad \text{car } 0,94x > 0$$

$$0,94 T_m + 1,5 \leq 0,94 \times 25 + 1,5 \quad \text{car } 1,5 > 0$$

$$T_{m+1} = 0,94 T_m + 1,5 \text{ alors on a :}$$

$$\boxed{T_{m+1} \leq 25}$$

On a démontré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} \leq 25}$$

Ce résultat était prévisible car la température de la terrasse est à 25°C .

4. Étudions le sens de variation de T_n

$$T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$$

$$\begin{cases} -0,06 < 0 \\ T_n \leq 25 \\ T_n - 25 \leq 0 \end{cases}$$

par produit on a : $-a \times (-b) = c$

$$a = 0,06 \text{ et } b = T_n - 25$$

$$c \geq 0$$

$$\text{donc } (T_n) \text{ est } k$$

$$k > 0$$

Donc la suite est croissante pour tout n entier naturel

5. À l'aide de la calculatrice on peut conjecturer que l'hypothèse que T_n est convergente vers un entier naturel ?

1090

b. Montrons que U_n est géométrique

$$U_n = T_n - 25$$

$$U_0 = T_0 - 25$$

$$U_0 = -19 - 25$$

$$U_0 = -44$$

$$\frac{-41,36}{-44} = 0,94$$

$$U_1 = T_1 - 25$$

$$U_1 = -16,36 - 25$$

$$U_1 = -41,36$$

$$\frac{-41,36}{-38,8784} = 0,94$$

$$U_2 = T_2 - 25$$

$$U_2 = -13,8784 - 25$$

$$U_2 = -38,8784$$

$$r = 0,94$$

U_n est géométrique de raison 0,94 et de premier terme -44.

0,25

$$b. U_n = T_n - 25$$

$$U_n = -19 \times 0,94^n + 25$$

$$T_n = -19 \times 0,94^n + 25$$

c.

$$T_n = -44 \times 0,94^n + 25$$

$$0,94^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ par produit } -44 \times 0,94^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

0,75

$$\text{par somme } -44 \times 0,94^n + 25 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 25$$

0,25

La température du gâteau se rapprochera de plus en plus de 25°C sans jamais le dépasser

7. a. Calculons T_{30}

$$T_n = -44 \times 0,94^n + 25$$

$$T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25 \approx 18,124$$

0,5

$$\boxed{T_{30} \approx 18} \text{ arrondi à l'entier le plus proche}$$

b. Donnons $T_a \leq 10 \leq T_b$

$$T_{17} \leq 10 \leq T_{18}$$

$$T_{17} \approx 9,63$$

$$T_{18} \approx 10,554$$

0,25

expliquez, interprétez

c.

def seuil():

$$n = 0$$

$$T = -44 * 0,94^n + 25$$

while $T \leq 10$:

$$T = -44 * 0,94^n + 25$$

$$n = n + 1$$

return n

0

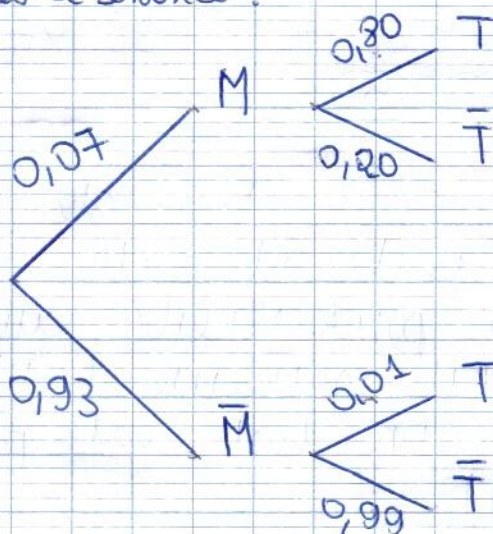
1130

18,25
20

DS de maths

Exercice 1:

D'après l'énoncé:



$P(M) > 0$ donc d'après la formule des probabilités composées:

$$\begin{aligned}
 P(M \cap T) &= P(M) \times P_M(T) \\
 &= 0,07 \times 0,80 \\
 P(M \cap T) &= \underline{0,056}
 \end{aligned}$$

2- $\{M, \bar{M}\}$ est un système complet d'événement. Donc d'après la formule des probabilités totale

$$\begin{aligned}
 P(T) &= P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) \\
 P(\bar{M}) &> 0
 \end{aligned}$$

Or d'après la formule des probabilités composées et la question précédente

$$P(T) = 0,056 + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T)$$

1

$$\text{Donc } P(T) = 0,056 + 0,93 \times 0,01 \\ = \underline{0,0653}$$

3- Dans un contexte de depistage, il est plus pertinent de connaître la probabilité que la personne soit malade tout en sachant que son test est positif donc $P_T(M)$.

$P(T) > 0$. D'après la définition de la probabilité conditionnelle :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$$

Donc $P_T(M)$ d'après les questions précédente est égale à

1

$$P_T(M) = \frac{0,056}{0,0653}$$

$$P_T(M) \approx \underline{0,86}$$

1130

5-a « Choisir une personne au hasard et regarder si son test est positif ou non », est une épreuve de Bernoulli,
 Succès « le test est positif »,
 $p = 0,0653$

On recommence cette épreuve $n = 10$ de façon identique de manière indépendante étant un tirage avec remise. C'est donc un schéma de Bernoulli de paramètres $p = 0,0653$ et $n = 10$

X compte le nombre de personne ayant un test positif, c'est à dire les succès.

donc $X \sim B(10; 0,0653)$.

2 - $X \sim B(10; 0,0653)$ donc pour tout $k \in [0; 10]$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1-p)^{10-2}$$

$$P(X = 2) \approx 0,09$$

6- Avec $n = 68$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 0)$$

$$\text{ou } P(X \leq 0) \approx 0,0103324041$$

$$\begin{aligned} \text{donc } P(X \geq 1) &\approx 1 - 0,0103324041 \\ &\approx 0,9896675959 \text{ ou } 98,97\% \end{aligned}$$

Avec $n = 69$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 0)$$

$$\text{ou } P(X \leq 0) \approx 0,0094707582$$

$$\begin{aligned} \text{donc } P(X \geq 1) &\approx 1 - 0,0094707582 \\ &\approx 0,9905292418 \text{ ou } 99,05\% \end{aligned}$$

Il faudrait donc tester au minimum 69 personnes pour avoir cette probabilité

1130 Garcia 2

En 10 minute, les gateaux ont augmenté de :

$$1,3 - (-19) = 20,3^{\circ}\text{C}$$

En 25 minutes ils auront augmentés de

$20,3 \times 2,5 = 50,75^{\circ}\text{C}$, la vitesse de décongélation étant constante.

^

$$-19 + 50,75 = 31,75$$

Le gateaux auront donc comme température 25 minutes après leur sortie du congélateur !

0,5 { Ce modèle semble ne pas être pertinent car une vitesse de décongélation n'est pas constante !

1. $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$T_{n+1} - T_n = -0,06 \times |T_n - 25|$$

⇒ $T_{n+1} = -0,06 T_n + 1,5 + T_n$ ✓

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$$

$$1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$$

$$2. T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$$

$$\text{donc } T_{0+1} = 0,94 T_0 + 1,5$$

$$= 0,94 \times (-19) + 1,5$$

$$T_1 = -16,44$$

$$1 \quad T_{1+1} = 0,94 T_1 + 1,5$$

$$= 0,94 \times (-16,44) + 1,5$$

$$T_2 = -13,9$$

3- Soit $P(n) : \langle T_n \leq 25 \rangle$

Démontrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Initialisation :

$$0,5 \quad T_0 = -19 \leq 25$$

$P(0)$ est donc vraie.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1130

Supposons $P(m)$ vrai et démontrons $P(m+1)$

$$T_m \leq 25 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence ✓}$$

$$0,94 T_m \leq 0,94 \times 25 \quad \text{car } 0,94 > 0 \quad \checkmark$$

$$0,94 T_m + 1,5 \leq 23,5 + 1,5 \quad \checkmark$$

$$T_{m+1} \leq 25 \quad \text{d'après la définition de la suite. ✓}$$

$P(m+1)$ est donc vraie. ✓

0,25 ✓
Finalement on a démontré par récurrence que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad T_m \leq \underline{25} \quad \checkmark$$

0,25 ✓
Ce résultat est prévisible car la température de la terrane est de 25°C .

4- Soit f la fonction associée à $|T_m|$

$$f : x \mapsto 0,94x + 1,5 \quad \checkmark$$

f est une fonction affine avec $a = 0,94$ et $b = 1,5$.

f s'annule en $-\frac{b}{a} = -1,6$

0,25

Don tableau de variation est donc ceci sachant qu'il tend vers le signe de a c'est à dire positif :

7-5

x	$-\infty$	$-1,6$	$+\infty$
signe de f		$-$	$+$
variation de f			

NON.

f est toujours croissante donc $|T_n|$ est aussi croissante

0,5

5- D'après la calculatrice, $|T_n|$ converge vers 25.

6- $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_n = T_n - 25$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = T_{n+1} - 25$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5 - 25$$

$$1130 \Leftrightarrow u_{n+1} = 0,94 T_n - 23,5$$

$$= 0,94 (T_n - 25)$$

$$\text{Or } T_n - 25 = u_n$$

1 donc (u_n) est une suite géométrique
 que raison $q = 0,94$ et
 de premier terme $u_0 = T_0 - 25 = -44$

$$\text{or } u_n = T_n - 25$$

$$\Leftrightarrow T_n = u_n + 25$$

Or u_n est une suite géométrique
 donc

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$= -44 \times 0,9^n$$

1 Finalement $T_n = -44 \times 0,9^n + 25$

$$c) 0,94^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc par multiplication

$$-44 \times 0,94^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Pour somme :

$$-44 \times 0,94^n + 25 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 25$$

9/92

donc

1 $T_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 25$ -

Les gateaux n'auront donc jamais une température supérieur à 25°C .

7 (a) -

$$T_m = -44 \times 0,94^m + 25 \quad \text{donc}$$
$$T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25 \approx 18$$

0,5 La température atteinte par les gateaux sera de 18°C au bout d'une demi-heure -

b)

$$T_{17} = -44 \times 0,94^{17} + 25 = 9,6317$$

$$T_{18} = -44 \times 0,94^{18} + 25 = 10,554$$

0,5 Julie devra donc consommer ses gateaux entre la 17^{ème} et 18^{ème} minute après leur décongelation.

c -

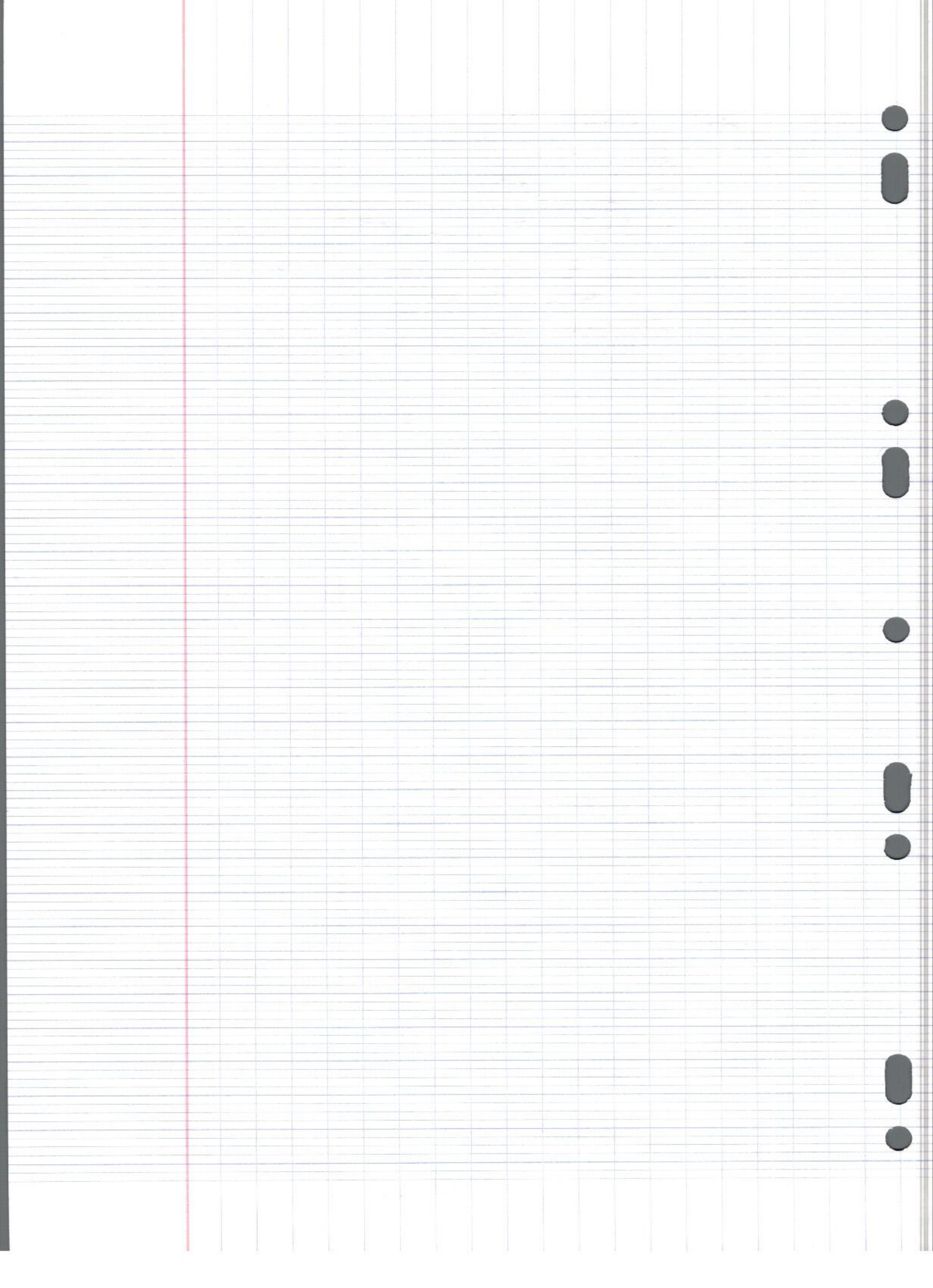
1130

def seuil () :

 $n = 0$ $T = -10$ while $T > 10$:

0,75

 $T = -44 \times 0,94 \times n + 25$ $n = n + 1$ return n

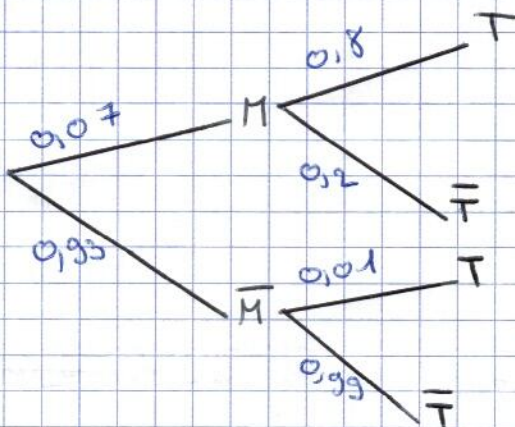


Jeudi 29 septembre 2020Bac blanc de Mathématique n°1Note:Observation:

$$\frac{5,75}{20}$$
Exercice 1: (8 points)

1) On cherche à calculer la probabilité de l'événement $M \cap T$. Par cela, nous allons nous aider d'un arbre pondéré.

Notons que d'après l'énoncé: M : la personne est malade $\rightarrow$
 T : le test est positif $\rightarrow$

Calcul de $P(M \cap T)$:

* D'après la formule: $P(M \cap T) = P(M) \times P(T)$

Donc on a: $P(M \cap T) = 0,07 \times 0,8$
 $= 0,056$

0,75

La probabilité que l'individu soit malade et a un test positif est de 0,056

2) On cherche à calculer $P(T)$.

D'après la formule, $P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$

Donc on a: $P(T) = 0,07 \times 0,8 + 0,93 \times 0,01$
 $= 0,0653$

1

La probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif est bien égale à 0,0653.

3) Calculons $P_M(T)$

D'après la formule $P_M(T) = \frac{P(T \cap M)}{M}$

On a: $P_M(T) = \frac{0,056}{0,07}$

$P_M(T) = 0,8$

* Calculons $P_T(M)$

D'après la formule $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{T}$

on a: $\frac{0,056}{0,0653}$

$P_T(M) = \frac{0,056}{0,0653}$

$P_T(M) = 0,9$

Donc j'ai eu
que vous répondiez
à la question 4.

De ce fait, d'après les calculs, il est plus pertinent de connaître $P_T(M)$ dans un contexte de dépistage de la maladie.

4) On cherche à calculer $P_T(M)$:

D'après la formule, $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{T}$

on a donc: $P_T(M) = \frac{0,056}{0,0653}$

$= 0,857$ soit $0,85$

La probabilité qu'elle soit malade est de $0,85$

5) a) La loi de Bernoulli d'après la loi de Bernoulli on a:

$X \sim B(10, 100)$ et est indépendante car d'après l'énoncé il s'agit d'un tirage avec remise. On notera que le succès: "test positif"

1140 TE

5) b) on a? $P(X=2)$

Donc d'après la formule, on a:

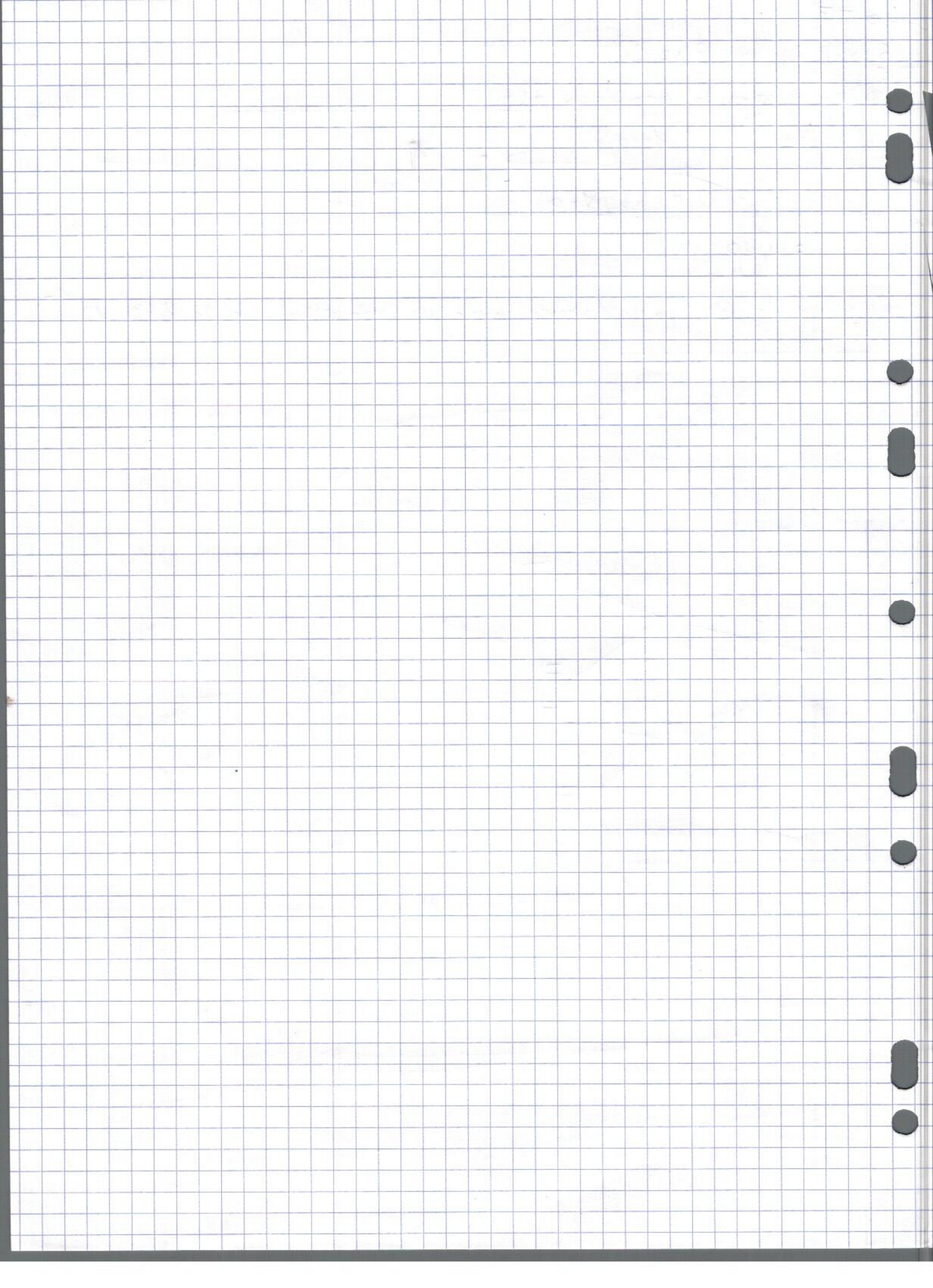
$$P(X=2) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \binom{10}{2} 0,0653^2 (1-p)^{10-2}$$

$$= 1,40 \times 10^{-12}$$

1

La probabilité que deux personnes aient un test positif est de $1,40 \times 10^{-12}$



6)

Exercice 2: (12 points)

1) Premier modèle:

On sait que l'augmentation de la température est la même, minutes après minutes, et qu'au bout de 10 minutes la température des gâteaux est de $1,3^{\circ}\text{C}$. On cherche à déterminer quelle serait la température des gâteaux au bout de 25 minutes.

Fonction affine pas linéaire.

Pour cela on fait un produit en croix

$$\left. \begin{array}{l} 10 \text{ minutes} \rightarrow 1,3^{\circ}\text{C} \\ 25 \text{ minutes} \rightarrow ? \end{array} \right\} 25 \times 1,3 \div 10 = 3,25$$

Au bout de 25 minutes la température des gâteaux est de $3,25^{\circ}\text{C}$. En 5 minutes, ils ont pris $1,95^{\circ}\text{C}$ de plus. Ce modèle est pertinent.

11- Second modèle

1) Soit $m \in \mathbb{N}$ ok

~~on sait que~~ T_m

$$\forall m \in \mathbb{N}, T_{m+1} - T_m = -0,06 \times (T_m - 25)$$

$$\text{Donc } T_{m+1} = -0,06 \times (T_m - 25)$$

$$= -0,06 + 1 \times T_m + 0,06 \times (-25)$$

$$= 0,94 \times T_m + 1,5$$

0,5

$$T_{m+1} = 0,94 T_m + 1,5$$

on a justifié que pour tout entier m , $T_{m+1} = 0,94 T_m + 1,5$

2) ~~3)~~

3) $\forall n \in \mathbb{N} \quad T_n : T_n \leq 25$

Démontrons par récurrence que $T(n)$ est vraie

* Initialisation:

~~pour T_0~~

D'une part: $T_0 : T_0 \leq 25$

D'autre part: $T_0 : 0,94 T_0 + 1,5$

0,25

$$0,94 + 1,5 - T_0 = T_0$$

$$= 0,94 + 1,5 = T_0$$

$$= 2,44 = T_0$$

Donc $T_n \leq 25$ car $2,44 \leq 25$

4) La suite $T(n)$ est donc croissante

1150

Jeudi 29 septembre 2022

Bac Blanc Maths

$$\frac{9}{20}$$

Exercice 1:

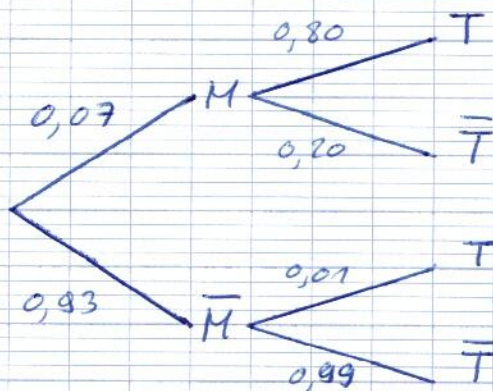
1) Calculons $P(M \cap T)$:

D'après la formule de probabilité composée:

$$P(M \cap T) = P(M) \times P(T) \\ = 0,07 \times 0,80$$

$$P(M \cap T) = 0,056$$

Arbre pondéré:

2) Démontrons que $P(T) = 0,0653$

D'après la formule de probabilité totale :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) \\ &= 0,056 + P(\bar{M}) \times P(T) \\ &= 0,056 + 0,0093 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(T) = 0,0653}$$

3) Il est plus pertinent de connaître $P_H(T)$.

4) Calculons $P_T(M)$:

* $P(T) > 0$, donc :

0.5 D'après la formule de probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} P_T(M) &= \frac{P(M \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{0,056}{0,0653} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_T(M) = 0,07}$$

5)

a. * Épreuve de Bernoulli

- Prendre une personne et savoir si elle est positive.
- Succès : " la personne est positive "
- $p = 0,07$

* Schéma de Bernoulli

L'épreuve est répétée $n = 10$ ^{fois} de façon indépendante

1150 et identique. ✓

1,5 X compte le nombre de personnes positif donc:
 $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10; 0,07)$ ✓

5. Déterminons $P(X=2)$

$$P(X=2) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \quad \text{un...}$$

1,25

$$= \frac{10!}{2!(10-2)!} \times 0,07^2 \times (1-0,07)^{10-2}$$

$$= \frac{10!}{2!(10-2)!} \times 0,07^2 \times 0,93^8$$

$$P(X=2) \neq 0,12$$

Exercice 2:

I/ Premier modèle

Déterminons la température des gâteaux au bout de 25 min

D'après l'énoncé:

- * Au bout de 10 min les gâteaux sont à $1,3^\circ\text{C}$
- * la vitesse de décongélation est constante.

$$\text{Donc : } -10 - 1,3 = -20,3$$

Or, la température augmente donc en 10 min la température des gâteaux ~~ont~~ augmentée de $20,3^\circ\text{C}$

Sachant que la vitesse de décongélation est la même on a :

$$-19 + (20,3 \times 2) = 21,6.$$

Mais on a seulement pour 20 min or il nous faut pour 25 min alors :

$$10 \times \frac{1}{2} = 20,3 \times \frac{1}{2}$$
$$5 = 10,15$$

Donc :

$$21,6 + 10,15 = 31,75$$

✓

Au bout de 25 min, les gâteaux seront à $31,75^\circ\text{C}$

✓

Ce résultat semble par très pertinent car $31,75 > 25$.

II/ Second modèle :

2) Calculons T_1 et T_2

$$T_1 = 0,94 T_0 + 1,5$$
$$= 0,94 \times (-19) + 1,5$$

$$T_1 \approx -18,4 \quad ?$$

$$T_2 = 0,94 T_1 + 1,5$$
$$= 0,94 \times (-18,4) + 1,5$$

$$T_2 \approx -17,3$$

3) Notons $P(n)$ " $T_n \leq 25$ " ✓

Démontrons par récurrence que $P(n)$ est vraie, $\forall n \in \mathbb{N}$

1150

* Initialisation :

D'une part : $T_0 = 19$ D'autre part : $19 \leq 25$ Donc $P(n)$ est vraie.

* Hérité :

Soit $n \in \mathbb{N}$:Supposons $P(n)$ est vraie, déterminons $P(n+1)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$T_n \leq 25$$

$$0,94 T_n \leq 25 \times 0,94 \quad \text{car } 0,94 > 0$$

$$0,94 T_n + 1,5 \leq 23,5 + 1,5$$

$$0,94 T_n + 1,5 \leq 25$$

0,75

On a démontré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, T_n \leq 25.}$$

7)

a. Calculons pour $n = 30$

$$T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25$$

$$T_{30} \approx 18$$

0,5

La température atteinte par les gâteaux est 18°C

TA

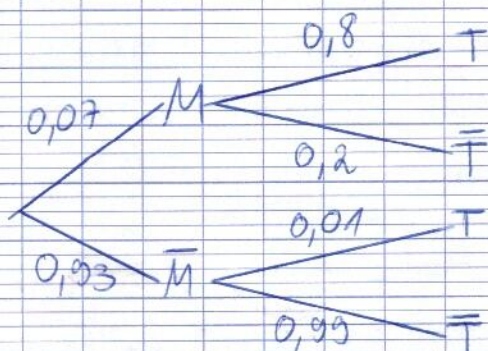
BAC Blanc de Maths du jeudi 29
septembre 2022
1180

15,75
20

Exercice 1:

A- Calculons la probabilité de

1- Calculons $P(M|T)$ avec l'aide d'un arbre pondéré:



D'après la formule des probabilités composées:

$$P(M|T) = P(M) \times P_M(T) \quad \text{avec } P(M) > 0$$

$$= 0,07 \times 0,8$$

$$P(M|T) = 0,056$$

2- Démontrons que $P(T) = 0,0653$:

D'après la formule des probabilités totales:

$$P(T) = P(M) \times P_M(T) + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T)$$

$$= 0,056 + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T)$$

$$= 0,056 + 0,93 \times 0,01$$

$$= 0,056 + 0,0093$$

$$P(T) = 0,0653$$

avec $P(\bar{M}) > 0$

A

3- Pour un dépistage, il est plus pertinent de connaître $P_T(M)$ car il permet d'identifier plus précisément les malades dans les personnes testées positives.

4 - Calculons $P_T(M)$:

D'après la formule des probabilités composées:

$$P_T(M) = \frac{P(T|M)}{P(T)} \quad \text{avec } P(T) > 0$$
$$= \frac{0,096}{0,0663}$$

$$P_T(M) = 0,85758$$
$$\approx 0,86$$

5-a) Précisons la loi de probabilité que suit X:

Choisir une personne au hasard est une épreuve de Bernoulli.

Le succès est "la personne est malade".

Le paramètre est $p = 0,07$ arrondi à quatre

l'épreuve de Bernoulli est répétée $n = 10$ fois de façon indépendantes et identiques.

C'est donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,07$.

X compte le nombre de personne malade, i.e. de succès, donc:

$$X \sim \mathcal{B}(10; 0,07)$$

b) Déterminons $P(X=2)$:

$$P(X=2)$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \quad \text{car } \dots$$

$$P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0,07^2 \times (1-0,07)^{10-2}$$

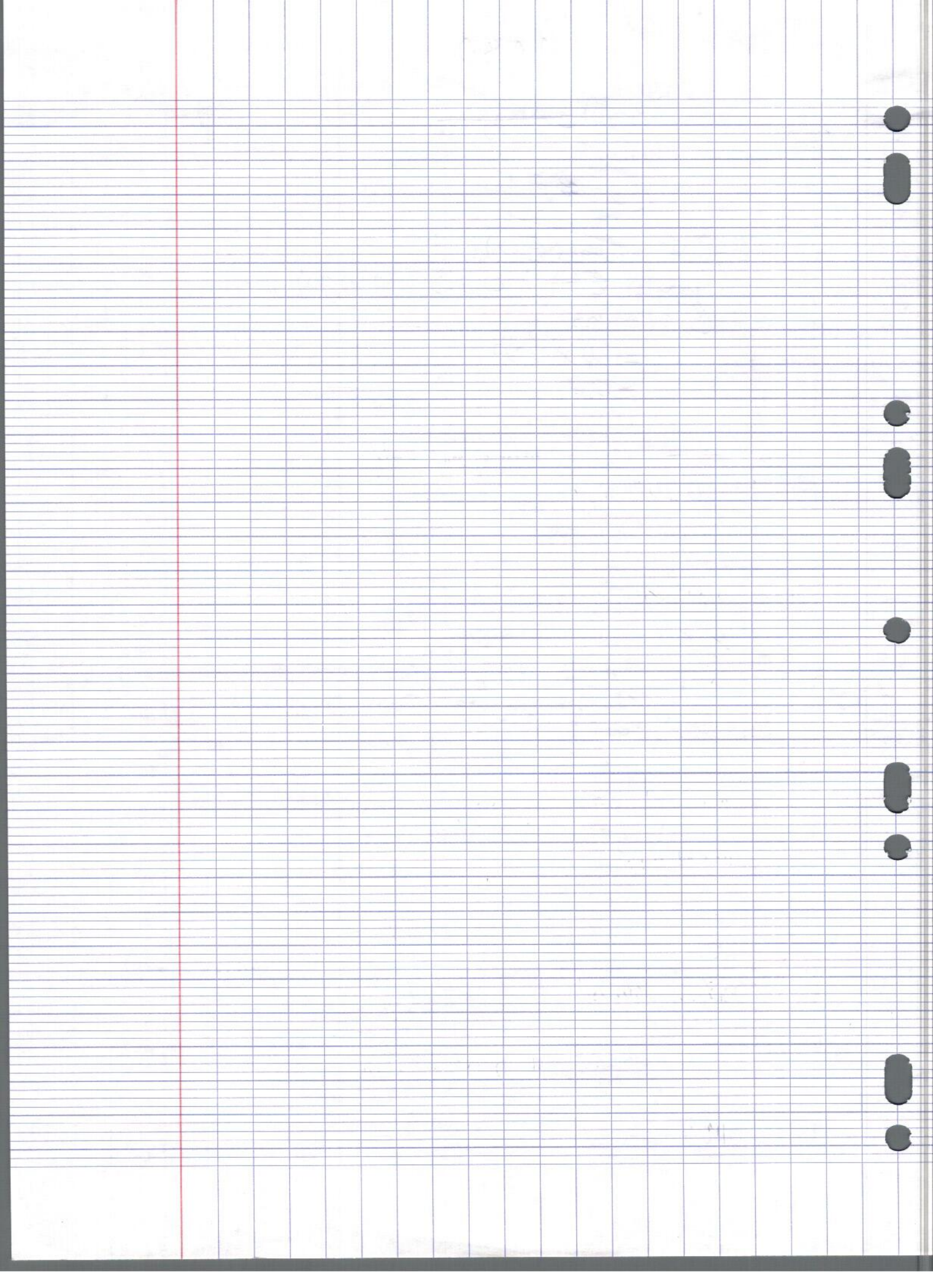
1180

$$P(X=2) = \frac{10!}{2!(10-2)!} \times 0,07^2 \times (1-0,07)^8$$
$$\approx 0,12$$

6-Déterminons $E(X)$:

Puisque ~~$E(X)$~~ $X \sim \mathcal{B}(10; 0,07)$ alors:

$$E(X) = np$$
$$= 10 \times 0,07$$
$$= 0,7$$



1180

BAC Blanc de Maths du jeudi 29
septembre 2022

TA

Exercice 2:I - Premier modèle

On sait que qu'à 0 minute le gâteau était à -19°C et qu'à 10 minutes il était à $1,3^{\circ}\text{C}$, donc:

$$1,3 - (-19) = 20,3 \quad \checkmark$$

Le gâteau se réchauffe de $20,3^{\circ}\text{C}$ toutes les 10 minutes soit $2,03^{\circ}\text{C}$ par minutes, alors:

$$2,03 \times 2,03 \times 25 - 19 = 31,75 \quad \checkmark$$

Le gâteau sera à $31,75^{\circ}\text{C}$ à 25 minutes.

➤ Ce modèle ne semble pas pertinent. car...

II - Second modèle

1- Justifions que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$

D'après l'énoncé:

$$T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25) \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= -0,06 \times (T_n - 25) + T_n \quad \checkmark \\ &= -0,06T_n + 1,5 + T_n \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$T_{n+1} = -0,06T_n + 0,94T_n + 1,5 \quad \checkmark$$

On a montré que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5 \quad \checkmark$$

A

2- Calculons T_1 et T_2 :

$$\begin{aligned}T_1 &= T_0 + 1 = 0,94 \times T_0 + 1,5 \\&= 0,94 \times (-19) + 1,5 \\&= -16,36 \\&\approx -16,4\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}T_2 &= T_1 + 1 = -13,8784 \\&\approx -13,9\end{aligned}$$

3- Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leq 25$.

Notons $P(n)$: " $T_n \leq 25$ ".

Initialisation : $T_0 = -19$ et $-19 \leq 25$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie et démontrons $P(n+1)$.

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$T_n \leq 25$$

En remplaçant dans l'inégalité :

$$T_{n+1} \leq 25$$

$$0,94 T_n + 1,5 \leq 25$$

$$0,94 T_n \leq 23,5$$

$$T_n \leq \frac{23,5}{0,94} = 25 \quad \text{car } 0,94 > 0$$

Raisonnement à l'envers.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

On a démontré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n \leq 25$$

Or ce résultat était prévisible.

4- Étudions le sens de variation de (T_n) .

$$\begin{aligned}T_{n+1} - T_n &= -0,06(T_n - 25) \\&= -0,06 T_n + 1,5\end{aligned}$$

or $-0,06 T_n + 1,5 > 0$ donc (T_n) est croissante sur $[0; +\infty[$.

0,5 5) On peut conjecturer que (T_n) est croissante et majorée par 25. donc d'après le théorème de la limite monotone, (T_n) est convergente. ~~vers 19~~

6-a) Démontrons que (U_n) est géométrique :

$$U_n = T_n - 25$$

$$U_{n+1} = T_{n+1} - 25$$

$$= 0,94T_n + 1,5 - 25$$

$$= 0,94T_n - 23,5$$

$$= 0,94(T_n - 25)$$

$$U_{n+1} = 0,94 U_n$$

1 (U_n) est géométrique de raison $q = 0,94$ et $U_0 = -44$

b) Dédoublons ~~la~~ $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a $U_n = T_n - 25$, donc :

$$T_n = U_n + 25 \rightarrow \text{car?}$$

$$= U_0 \times 0,94^n + 25$$

$$T_n = -44 \times 0,94^n + 25$$

0 c) Dédoublons la limite de (T_n) :

$$T_n = -44 \times 0,94^n + 25$$

En passant à la limite :

$$l = -44 \times l + 25$$

$$-43l = 25$$

$$l = \frac{25}{-43}$$

7-a) Cherchons la température après 30 minutes:
Avec la calculatrice :

$$T_{30} = 18,537$$

$$\approx 19$$

0,5 Il sera à 19°C ✓

b) Cherchons à quelles minutes elle doit déguster:

$$T_{17} = 9,6317 \text{ et } T_{18} = 10,554.$$

Elle doit donc manger entre 17 et 18 minutes.

0,5

Jeudi 29 septembre 2022

TA

1190

Bac blanc de maths

9
20

Exercice 1:

1) Calculons $P(H \cap T)$.

Nous pouvons utiliser la formule des probabilités composées.

$$P(H \cap T) = P(H) \times P_T(H)$$

$$P(H \cap T) = 0,07 \times 0,8$$

$$P(H \cap T) = 0,056$$

2) Calculons $P(T)$.

Nous pouvons utiliser la formule des probabilités totales.

$$P(T) = P(H \cap T) + P(\bar{H} \cap T)$$

$$P(T) = 0,056 + 0,93 \times 0,01$$

$$P(T) = 0,0653$$

3) Il est plus pertinent de connaître $P_H(T)$, dans un contexte de dépistage de la maladie car il s'agit que le test d'un individu est positif sachant que la personne est malade, alors que $P_T(H)$ indique que la personne est malade sachant que le test est positif.

4) Calculons $P_H(T)$.

$$P_H(T) = \frac{P(H \cap T)}{P(H)}$$

0,5

$$P_T = \frac{0,056}{0,07}$$

$$P_T(T) = 0,80$$

5a) Justifions qu'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli.

* Épreuve de Bernoulli

Épreuve: "l'individu ayant un test positif ou non"

Succès: "l'individu ayant un test positif"

$$p = 0,0653$$

* Schéma de Bernoulli

L'expérience est répétée $n=10$ fois de façon indépendante et à l'identique

L'expérience est un schéma de Bernoulli de paramètre $n=10$ et $p=0,0653$

X compte le nombre d'individus ayant un test positif, c'est-à-dire le succès donc

X suit une loi binomiale. $X \sim \mathcal{B}(10, 0,0653)$

1,5

5b) Calculons $P(X=2)$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1-0,0653)^{10-2}$$

$$P(X=2) = 0,11$$

1,25

6) Calculons $P(X \geq 1)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 0)$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$$

$$P(X \geq 1) = 0,49$$

0,25

Exercice 2:

I - Premier modèle

1) Au bout de 10 minutes, la température des gâteaux est de $1,3^\circ\text{C}$.

Donc pour 1 minute, la température des gâteaux est de $0,13^\circ\text{C}$

2/5

Pour 25 minutes, la température des gâteaux serait de $3,25^{\circ}\text{C}$

$$0,13 \times 25$$

Le modèle est donc constant car c'est une suite de récurrence tel que: $0,13 \times \text{le nombre de minutes}$

II - Second modèle

1) Justifions que, pour tout n , on a $T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$

$$T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$$

$$0,125 \quad T_{n+1} - T_n = -0,06 \times T_n - 0,06 \times (-25)$$

$$T_{n+1} - T_n = -0,06 T_n + 1,5$$

$$T_{n+1} - T_n = -0,06 T_n + 1,5$$

$$T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$$

2) Calculons T_1

$$T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$$

$$T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5$$

$$T_1 = -16,36$$

Calculons T_2

$$T_2 = 0,94 \times (-16,36) + 1,5$$

$$T_2 = -13,88$$

3) Soit $P(m)$: " $T_m \leq 25$ "

Démontrons par récurrence que $P(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$

* Initialisation, d'après l'énoncé $T(0) = -19$

$$0,5 \quad T(0) = -19 \leq 25$$

Donc $P(0)$ est vraie

* Hérédité

Soit $m \in \mathbb{N}$

Supposons que $P(m)$ est vraie

Démontrons que $P(m+1)$ est aussi vraie

1) après l'énoncé $T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$.

En remplaçant, d'après l'hypothèse de récurrence...

$$T_{n+1} \leq 25$$

$$0,94 T_{n+1} \leq 25 \times 0,94$$

$$0,94 T_{n+1} + 1 \leq 23,5$$

$$0,94 T_{n+1} + 1,5 \leq 23,5 + 1,5$$

$$T_{n+1} \leq 25$$

raisonnement à l'envers.

Donc $P(m+1)$ est vraie

On a démontré que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $T_m \leq 25$

Ce résultat est prévisible car la température de la chambre est de 25°C

4) On sait que $T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$ donc $f(x) = 0,94x + 1,5$
et $f'(x) = 0,94x$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	

$f(\frac{3}{2}) = 2,91$

5) et l'aide de la calculatrice, cette fonction affine est divergente, (T_m) diverge vers $+\infty$

6a) $U_m = T_m - 25$ donc $\frac{U_{m+1}}{U_m} = 9$

donc $U_{m+1} = T_{m+1} - 25$ alors $\frac{T_{m+1} - 25}{T_m - 25} = 9$
on multiplie

C'est donc une suite géométrique de raison 9 et de premier terme -24.

6b) Justifions que pour tout entier naturel m , $T_m = -44 \times 0,94^m + 25$

On sait que $T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$

6) On sait que $T_m = -44 \times 0,94^m + 25$

$\lim_{m \rightarrow +\infty} 0,94^m = +\infty$ par multiplication $\lim_{m \rightarrow +\infty} -44 \times 0,94^m = +\infty$

par addition $\lim_{m \rightarrow +\infty} -44 \times 0,94^m + 25 = +\infty$

La limite de la suite (T_m) est $+\infty$.

C'est cohérent car les gâteaux vont se décongeler et grimper au niveau de la température.

7a) La température atteinte par les gâteaux au bout de 30 min est de 18°C
 $-44 \times 0,94^{30} + 25 \approx 18$

7b) A partir de 10 minutes, les gâteaux sont à $-1,3^\circ\text{C}$
 $4 \leq 10 \leq 18$

Au bout de 4 minutes, les gâteaux sont à $-9,35^\circ\text{C}$ ($-44 \times 0,94^4 + 25 \approx -9,35$)
Au bout de 18 minutes, les gâteaux sont à $-10,55^\circ\text{C}$ ($-44 \times 0,94^{18} + 25 \approx -10,55$)

7c) def seuil():

$m = 0$

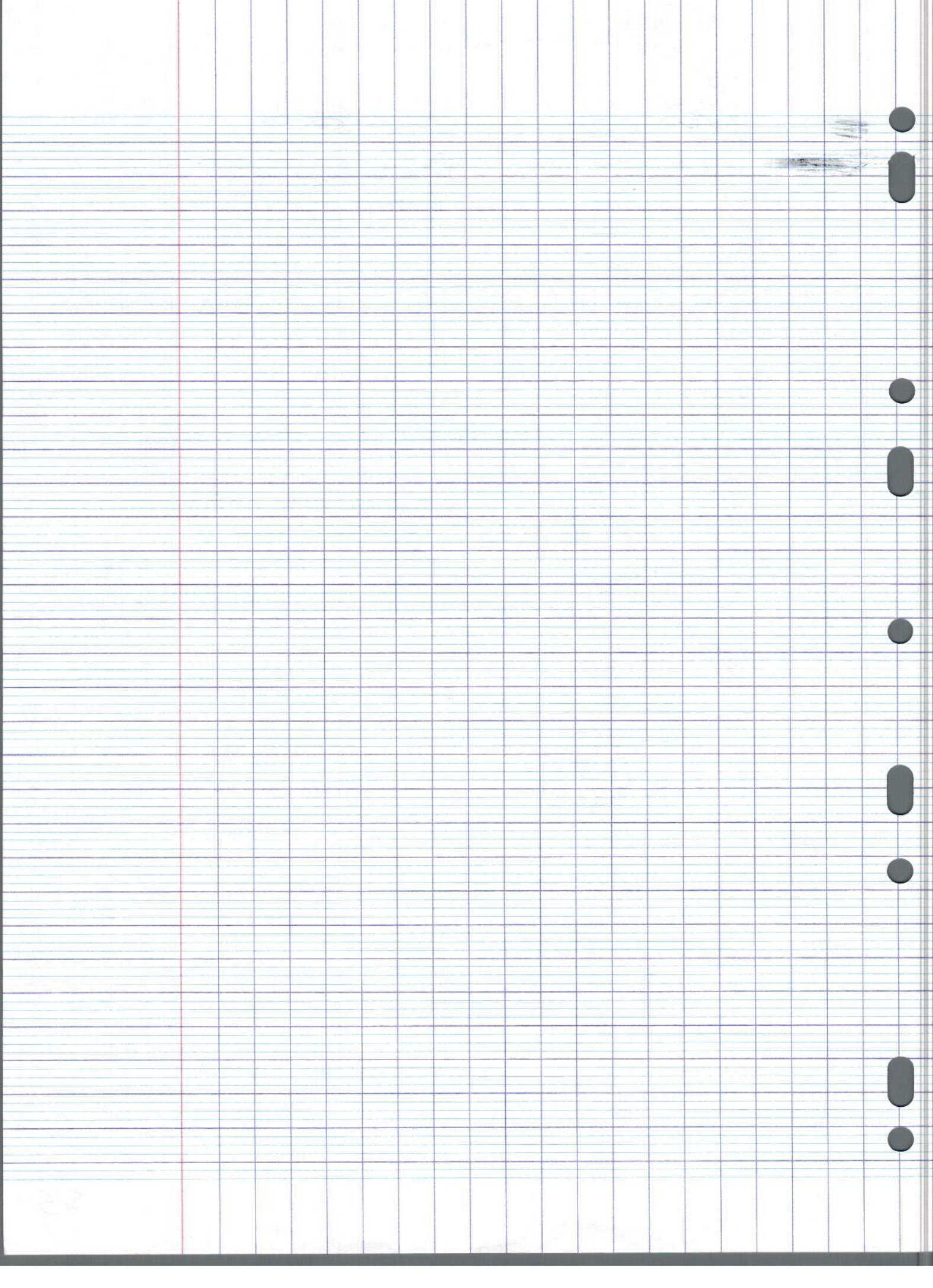
$T = -44 \times 0,94^m + 25$

While $T \geq 10$

$T = T - 10$

$m = m + 1$

return m



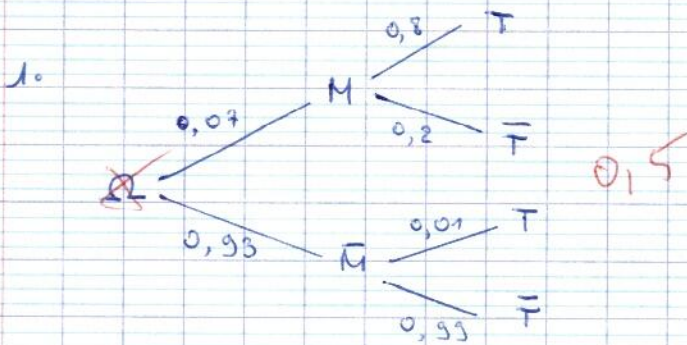
TE

Bac Blanc de mathématiques

(1230)

$$\frac{7,25}{20}$$

29/09/2022

Exercice 1 -

$$\begin{aligned}
 P(M \cap T) &= P(M) \times P(T) \\
 &= 0,07 \times 0,8 \\
 &= 0,056
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad P(T) &= P(M) \times P_M(T) + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T) \\
 &= 0,07 \times 0,8 + 0,93 \times 0,01 \\
 &= 0,0653
 \end{aligned}$$

3. Dans un contexte de dépistage de la maladie, il est plus pertinent de connaître la probabilité que l'individu soit malade sachant que son test s'est révélé positif, soit $P_T(M)$

$$4. \quad P_M(T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,056}{0,0653} \approx 0,86$$

0

5. a) X suit une loi Binomiale de paramètres
 $B(10; 0,1)$

0,25

$$\begin{aligned} b) P(X=k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ P(X=2) &= \binom{10}{2} 0,1^2 (1-0,1)^{10-2} \\ P(X=2) &= \end{aligned}$$

6.

TE

Exercice 2-I. Premier modèle

(1230)

29/05/2022

Nous savons qu'à ^{un temps} T_0 , les gâteaux sont à une température de -19°C . Au bout de 10 minutes, ils sont à une température de $1,3^\circ\text{C}$.

On peut donc considérer que la température des gâteaux augmente à raison de $20,3^\circ\text{C}$ toutes les 10 minutes, étant donné que $1,3 - (-19) = 20,3$.

Si l'on suit ce raisonnement, au bout de 20 minutes, les gâteaux devraient avoir atteint la température correspondante; on peut représenter ce modèle par la suite:

$$T_0 = -19$$

$$T_{10} = -19 + 20,3 = 1,3$$

$$T_{20} = 1,3 + 20,3 = 21,6$$

$$T_{25} = 21,6 + 20,3 \div 2 = 31,75$$

La température supposée des gâteaux est donc de $31,75^\circ$ au bout de 25 minutes, ce modèle ne semble pas pertinent. ~~car...~~

II - Se cond modèle

1. On sait que $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$

On a donc

3 - Soit $T_n \leq 25$

Démontrons par récurrence que T_n est vraie d'après T_{n+1} l'est aussi

Initialisation :

D'une part, $T_0 = -19$

D'autre part, $-19 \leq 25$

On peut donc en conclure que T_0 est vraie.

Supposons T_n vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que T_{n+1} l'est aussi.

D'après le ~~théorème~~ de récurrence, on a

$T_n \leq 25$

$T_{n+1} \leq 25$.

Selon la situation étudiée, ce modèle semble prévisible !

4. La suite (T_n) tend vers $+\infty$ car $T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$.

5.

6. a) la suite (U_n) est une suite de raison $q = \frac{50}{47}$, donc son premier terme $U_0 = \frac{50}{47} = 1,06$

7. c) def seuil () :

$n = 0$

$T = n+1$

while $T < 10$:

$T = n+1$

$n = n+1$

return n

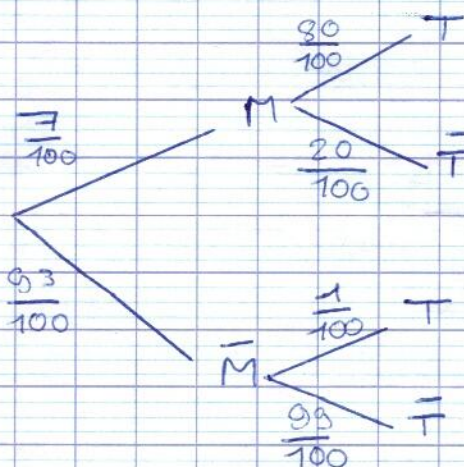
12 40
DS : Math

T^{alc} A

Encadrez vos conclusions jusqu'à la fin.

$$\frac{12}{20}$$

1) Avec l'aide de l'énoncé, nous avons l'arbre pondéré suivant.



1) D'après la ~~loi~~ des probabilités conditionnelles on a :

$$P(M \cap T) = P(M) \times P(T)$$

$$P(M \cap T) = 0,07 \times 0,8$$

$$\boxed{P(M \cap T) = 0,056}$$

La probabilité de $M \cap T$ est donc de 0,056

2) Recherche ~~que~~ de la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif.
D'après la loi des probabilités ~~conditionnelles~~ totales on a :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$$

$$P(T) = 0,056 + 0,93 \times 0,01$$

$$\frac{1}{6}$$

$$P(T) = 0,056 + 0,0093$$

$$P(T) = 0,0653$$

La $P(T)$ est donc bel et bien de 0,0653.

3) Dans un contexte de dépistage de maladie, il est plus pertinent de connaître $P_M(T)$ car cela correspond à la probabilité que la personne ait un test positif sachant qu'elle est malade.

4) Recherche de la probabilité de $P_M(T)$
d'après la formule des probabilités on a :

$$P_M(T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$$

$$P_M(T) = \frac{0,056}{0,0653}$$

$$P_M(T) \approx 0,86$$

La probabilité de $P_M(T)$ est d'environ de 0,86

5) a) Justifions qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli

① "Épreuve de Bernoulli"

- interroger une personne et noter si son test est positif ou non
- Succès : "interroger une personne ayant un test positif"
- $p = 0,0653$

② "Schéma de Bernoulli"

- L'événement est répété $n = 10$ fois et de manière indépendante
- C'est donc un schéma de Bernoulli avec $n = 10$ et $p = 0,0653$

1240

1,5

- X compte donc le nombre de succès

- $X \hookrightarrow B(10; 0,0653)$

$$2-) P(X=2) = \binom{m}{k} \times p^k \times (1-p)^{m-k}$$

$$P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1-0,0653)^{10-2}$$

$$P(X=2) \approx 0,12$$

1,25

La probabilité qu'exactement deux personnes aient un test positif est d'environ 0,12

6) Recherche du nombre minimum de personnes à tester pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre ait un test positif soit supérieur à 99%.

$$E(X) = m \times p$$

$$E(X) = 10 \times 0,0653$$

$$= 0,653$$

Exercice 2) Pour tout entier n on a $T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$ car 0,94 correspond à la baisse toute les minutes de la température,
 T_n est la température des gâteaux en degré Celsius au bout de n minutes après avoir été sortie du ~~four~~ congélateur,
 +1,5 correspond donc à l'augmentation de minutes

2) Calculons T_1 et T_2

D'après l'énoncé on a $T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$
donc $T_{0+1} = 0,94T_0 + 1,5$

$$T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5$$

$$T_1 \approx -16,4$$

de même pour T_2

$$T_2 \approx -13,9$$

3) Montrons $P(m)$: " $T_m \leq 25$ "

Démontrons par récurrence que $P(m)$ est vraie en calculant $P(0)$:

* On sait que $T_0 = -19$ donc on a

$$T_0 \leq 25$$

$$\text{soit } -19 \leq 25$$

$P(0)$ est donc vraie

* Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie, démontrons que $P(n+1)$ est vraie

D'après la formule de récurrence nous avons:

$$T_n \leq 25$$

Nous savons aussi que d'après l'énoncé on a $T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$

$$T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$$

$$0,94T_n \leq 0,94 \times 25$$

$$0,94T_n + 1,5 \leq 0,94 \times 25 + 1,5$$

soit

$$T_{n+1} \leq 25$$

Nous avons démontré que $P(n+1)$ est vraie

Donc pour tout entier naturel n on a $T_n \leq 25$

Le résultat était prévisible car la température

1290

du gâteau ne sera pas supérieure à celle de la température ambiante

TA 0,25

4) Étude du sens de variation de la suite (T_m)
 d'après les questions précédentes la suite (T_m) est croissante car la température ne cesse d'augmenter

0,5

5) À l'aide de la calculatrice nous pourrions constater que la suite est convergente et semble être majorée par 25

6) On a $u_m = T_m - 25$ Soit $m \in \mathbb{N}$

$$u_{m+1} = T_{m+1} - 25$$

$$u_{m+1} = 0,94T_m + 1,5 - 25$$

$$u_{m+1} = 0,94(T_m - 25) + 1,5$$

$$u_{m+1} = 0,94(T_m - 25) + 1,5$$

$$u_{m+1} = 0,94(u_m) + 1,5$$

0,5

C'est donc une suite géométrique avec $q = 0,94$ et $u_0 = -44$

b) pour tout entier naturel m , $T_m = -44 \times 0,94^m + 25$ car -44 correspond à u_0 , $0,94^m$ correspond à la raison et 25 correspond avec minimum

c) Recherche de la limite de $T(m)$

$$0,94^m \left(\frac{-44}{0,94^m} + \frac{25}{0,94^m} \right)$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} T(m) = 0$$

Forme indéterminée

0,5 7/a) d'après la calculatrice la température du gâteau au bout de 30 minutes sera d'environ 18°C

0,5 b) ~~$X = 17$~~ ≤ 10 ~~$\leq X = 18$~~

0,25 c) def seuil():
 $m = 0$
 $T = -19$ ✓
 while $T \geq 10$:
 $T = -16,36$
 $m = m + 1$
 return m

Bac Blanc 1
Mathématiques

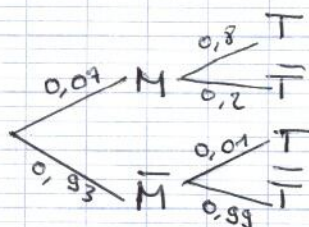
29/09/22

TA

1260

12,25
20

Exercice 1



1) Calculons $IP(M \cap T)$

D'après la formule des probabilités composées, et que $IP(M) > 0$ et $IP(T) > 0$:

$$\begin{aligned} IP(M \cap T) &= IP(M) \times IP_M(T) \\ &= 0,07 \times 0,8 \\ &= \underline{0,056} \end{aligned}$$

2) Calculons $IP(T)$

Soit $\{M; \bar{M}\}$ un système complet d'événements

D'après la formule des probabilités totales

$$IP(T) = IP(M \cap T) + IP(\bar{M} \cap T)$$

$IP(M) > 0$ donc

$$\begin{aligned} IP(T) &= IP(M) \times IP_M(T) + IP(\bar{M}) \times IP_{\bar{M}}(T) \\ &= 0,056 + 0,93 \times 0,01 \\ &= \underline{0,0653} \end{aligned}$$

1260

3) Il est plus pertinent de connaître $P_T(M)$, car on veut le nombre de malade.

4) Calculons $P_T(M)$

D'après la définition des probabilités conditionnelles

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$$

$$= \frac{0,056}{0,0653}$$

$$\approx 0,86$$

5) "choisir une personne au hasard" est une épreuve de Bernoulli.

Son succès correspond est que l'individu soit positif, le paramètre

$$p = 0,0653$$

Cette épreuve est répétée $n=10$ de manière indépendante et à l'identique. Il s'agit alors d'un schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire X compte le nombre d'individus ayant un test positif, on peut dire :

$$X \hookrightarrow B(10; 0,0653)$$

b) Déterminons $P(X=2)$

puisque $X \hookrightarrow B(10; 0,0653)$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X=2) = \binom{10}{2} 0,0653^2 (1-0,0653)^{10-2}$$

$$= \frac{10!}{2!(10-2)!} \times 0,0653^2 (1-0,0653)^{10-2}$$

$$\approx 0,11$$

1260

6) Determinons k pour que: $P(X \geq k) > 0,99$ pour tout $k \in \{0; 1; \dots; 10\}$

D'après la calculatrice:

$$P(X \leq 2) = \frac{0,8646}{0,9764} \text{ et } P(X \geq 3) = 0,9972$$

Il faut donc tester 3 personnes sur 10 pour que la probabilité du test soit supérieure à 99%.

Exercice 2

I) On suppose qu'à 0 minutes les gâteaux sont à -19°C En 10 minutes ils ont pris $17,7^\circ\text{C}$

$$\text{donc } \frac{17,7}{10} = 1,77$$

Au bout de 25 min, les gâteaux sont à $15,6^\circ\text{C}$

II -

$$1) T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$$

$$T_{n+1} - T_n = -0,06 T_n + 1,5$$

$$T_{n+1} = -0,06 T_n - T_n + 1,5$$

$$T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$$

2) $T_1 = 0,94 T_0 + 1,5$, d'après la question précédente

$$T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5$$

$$= -16,4$$

$$T_2 = 0,94 \times T_1 + 1,5$$

$$= 0,94 \times (-16,36) + 1,5$$

$$= -14,7$$

1260 ✓

$$T_2 = -13,9$$

3) Soit $P(n) : "T_n \leq 25"$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Démontrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

* Initialisation :

$$T_0 = -19 \quad \text{et} \quad -19 \leq 25$$

donc $P(0)$ est vraie

* Hérité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $P(n)$ est vraie et démontrons que $P(n+1)$

L'est aussi

$T_n \leq 25$, d'après l'hypothèse de récurrence

$$T_n \times 0,94 \leq 25 \times 0,94 \quad \text{car} \quad 0,94 > 0$$

$$0,94 T_n + 1,5 \leq 23,5 + 1,5$$

$$0,94 T_n + 1,5 \leq 25$$

$$T_{n+1} \leq 25, \text{ par définition de } (T_n)$$

Donc $P(n+1)$ est vraie

* Nous venons de démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

4) (T_n) est une fonction affine

donc

n	$-\infty$	$-1,6$	$+\infty$
T_n	$-\infty$	0	$+$
(T_n)			

3) bis - oui ce résultat est prévisible car la température extérieure est de 25° et que physiquement les gâteaux ne peut pas être plus chaud que la température ambiante

1260

5) Avec la calculatrice, je conjecture que la suite (T_n) converge vers $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (T_n) = +\infty$$

6) a) $U_n = T_n - 25$

$$U_{n+1} = T_{n+1} - 25$$

$$U_{n+1} = (0,94T_n + 1,5) - 25, \text{ d'après la définition de } (T_n)$$

$$U_{n+1} = 0,94T_n - 23,5 \quad u_n?$$

(U_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,94$ et de terme initial $u_0 = -23,5$

b)

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} -44 = -44$

et $-1 < q < 1$ car (T_n) est une suite géométrique

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = 0$

$\rightarrow$ je le compte
...

par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} -44 \times 0,94^n = 0$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 25 = 25$

par addition $\lim_{n \rightarrow +\infty} (T_n) = 25$

la température des gâteaux ne pourra pas dépasser 25°C .

1260

c) $T_{n+1} = 0,84T_n + 15$
 $l = 0,84l + 15$
 $l - 0,84l = 15$
 $0,06l = 15$
 $l = 25$

7) a - Calculons (T_n) lorsque $n = 30$

$T_{30} = -44 \times 0,84^{30} + 25$
 ≈ 18

b - D'après la calculatrice :

$T_{17} = 9,6$ et $T_{18} = 11,4$

$T_n = 10$ lorsque : $17 < n < 18, \forall n \in \mathbb{N}$

c - def seuil() :

$n = 0$

$T = -44 * 0,84^{**n} + 25$

while $T < 10$:

$T = T + 1$

$n = n + 1$

return n

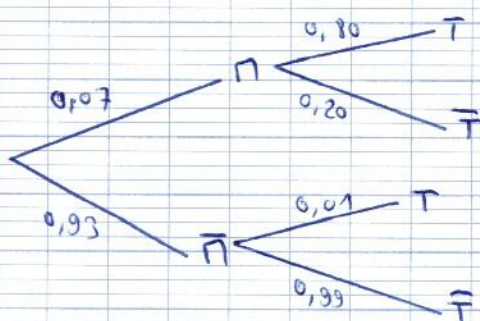
TE

1270

13,25

20

Exercice 1:

1) Calculons $P(N \cap T)$:

D'après la formule des probabilités composées on a:

$$P(N \cap T) = P(N) \times P(T|N)$$

$$= 0,07 \times 0,80$$

$$P(N \cap T) = 0,056$$

2) Démontrons que la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif est de 0,0653.

D'après la formule de probabilités totales on a:

$$P(T) = P(N) \times P(T|N) + P(\bar{N}) \times P(T|\bar{N})$$

ce n'est pas la formule des probabilités totales.

$$= 0,07 \times 0,80 + 0,93 \times 0,01$$

$$P(T) = 0,0653$$

3) Il est plus pertinent de connaître $P(T)$ car on sera si cette personne sera atteinte de la maladie ou non.

4) Calculons $P_T(n)$:

D'après la formule des probabilités conditionnelles on a:

$$P_T(n) = \frac{P(n \cap T)}{P(T)}$$

$$= \frac{0,056}{0,0653}$$

$$P_T(n) \approx 0,86$$

5) a) Démontrons qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli:

"Epreuve de Bernoulli"

- Regarder si le test est positif est une épreuve de Bernoulli.
- Succès: obtenir un individu ayant un test positif.
- $p = 0,0653$

L'épreuve de Bernoulli est répétée $n = 10$ fois à l'identique et de façon indépendante.

L'expérience est un schéma de Bernoulli de paramètre $n = 10$ et $p = 0,0653$.

X compte le nombre d'individus ayant un test positif.

$$X \sim B(10; 0,0653).$$

b) Calculons $P(X=2)$:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1-0,0653)^{10-2}$$

$$= \frac{10!}{2!(10-2)!} \times 0,0653^2 \times (1-0,0653)^8$$

$$P(X=2) \approx 0,11$$

6) Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles ait un test positif soit supérieur à 99%.

TE

1270.

0,25

$$P(X=0) = \binom{70}{0} \times 0,065^0 \times (1-0,065)^{70}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$$

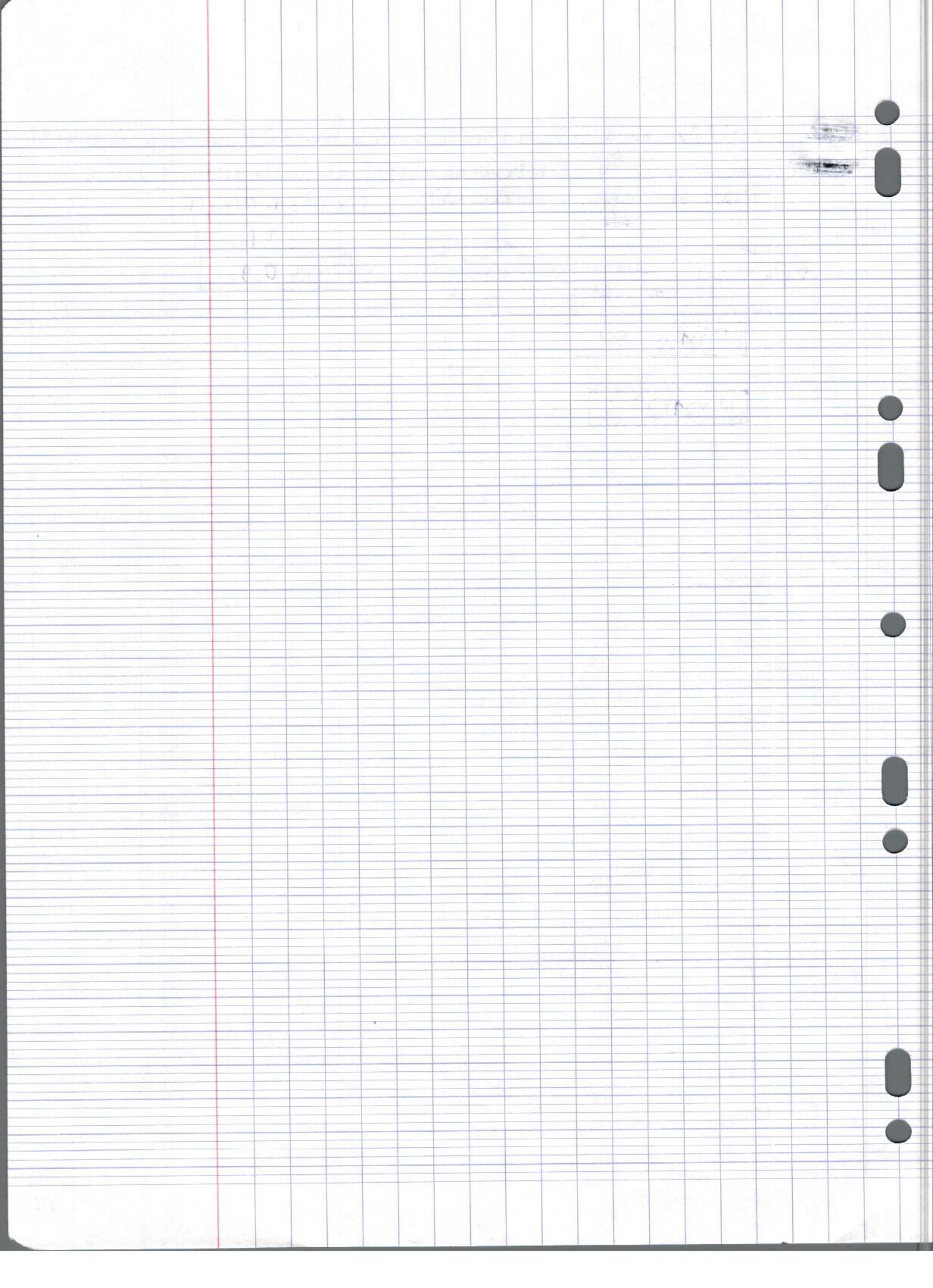
$$= 1 - 0,009$$

$$= \frac{70!}{0!(70-0)!} \times 0,065^0 \times (1-0,065)^{70}$$

$$P(X \geq 1) \approx 0,991$$

$$P(X \geq 1) \approx 0,991$$

$$P(X \geq 1) > 99\%$$



Exercice 2:

I - Premier modèle. Déterminons la température 25 min après.

Déterminons la température des gâteaux 25 min après leur sortie: température ne dépasse pas 25°.

$-44 \times 0,94^{25} + 25 = 16$ La température du gâteau sera de 16°. Ce modèle est pertinent car la

II - Second modèle.

1) Justifions que, pour tout entier n on a: $T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$.

$$T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$$

$$T_{n+1} = -0,06 \times (T_n - 25) + T_n$$

$$T_{n+1} = -0,06T_n + 1,5 + T_n$$

$$T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$$

2) Calculons T_1 et T_2 :

Supposons que T_{n+1} est vraie.

$$T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$$

$$T_{0+1} = 0,94T_0 + 1,5$$

$$T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5$$

$$T_1 = -16,4$$

Un nombre n'est ni vrai ni faux.

$$T_{1+1} = 0,94T_1 + 1,5$$

$$T_2 = 0,94 \times (-16,4) + 1,5$$

$$T_2 = -13,9$$

3) Démontrons par récurrence que $T_n \leq 25$:

Soit $P(n)$ " $T_n \leq 25$ " pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* Initialisation

Où une part

$$T_0 = -19$$

$$\text{donc } T_0 \leq 25$$

$P(0)$ est vraie.

* Hérité.

Supposons que $P(n)$ est vraie et démontrons que $P(n+1)$ est également vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Où après l'hypothèse de récurrence on a:

$$T_n \leq 25$$

$$0,94 T_n \leq 25 \times 0,94 \quad \text{car } \dots$$

$$0,94 T_n + 1,5 \leq 25 \times 0,94 + 1,5$$

$$T_{n+1} \leq 25$$

0,75 $P(n+1)$ est vraie.

On a démontré par récurrence que $T_n \leq 25$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

0,25 Ce résultat était prévisible car on ne peut pas dépasser la température ambiante.

4) Étudions le sens de variation de la suite (T_n) .



0,5 5) A l'aide de la calculatrice on peut conjecturer que la suite (T_n) est strictement croissante et à un majorant de 25 donc elle converge.

6) a) Démontrons que (U_n) est une suite géométrique.

$$U_n = T_n - 25$$

$$U_{n+1} = T_{n+1} - 25$$

$$U_{n+1} = 0,94 T_n - 25 + 1,5$$

$$U_{n+1} = 0,94 T_n - 23,5$$

$$U_{n+1} = 0,94 (T_n - 25)$$

$$U_{n+1} = 0,94 (U_n + 25 - 25)$$

$$U_{n+1} = 0,94 U_n$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 0,94$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = q^n$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_{n+1}}{T_n - 25} \quad q = 0,94$$

0,25 $= 0,94 u_n$ et c'était fini

Calculons U_0 :

$$U_0 = T_0 - 25$$

$$U_0 = T_0 - 25$$

$$U_0 = -19 - 25$$

$$U_0 = -44$$

(U_n) est géométrique de raison $q = 0,94$ et $u = -44$.

0,25

b) Déduisons que $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$

$$V_n = V_0 \times q^n$$

$$T_n = T_0 \times q^n$$

$$T_n = -44 \times 0,94^n + 25$$

car $T_n \leq 25$

c) En déduire la limite de la suite (T_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -44 = -44$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 25 = 25$$

Par addition et multiplication $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 25$

La température des gateaux se rapproche de 25° sans la dépasser.

7)a) Calculons la température au bout de 30 min:

$$T_n = -44 \times 0,94^n + 25$$

$$T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25$$

$$T_{30} \approx 18$$

b) Donnons un encadrement.

$$[17; 18]$$

Car à 17 min la température est voisine à $9,6^\circ$ et à 18 min à $10,5^\circ$.

c) def seuil (1):

$$n = 0$$

$$T = 0,94^n$$

while $T \leq$

$$T =$$

$$n = n + 1$$

return n

def seuil (1):

$$n = 0$$

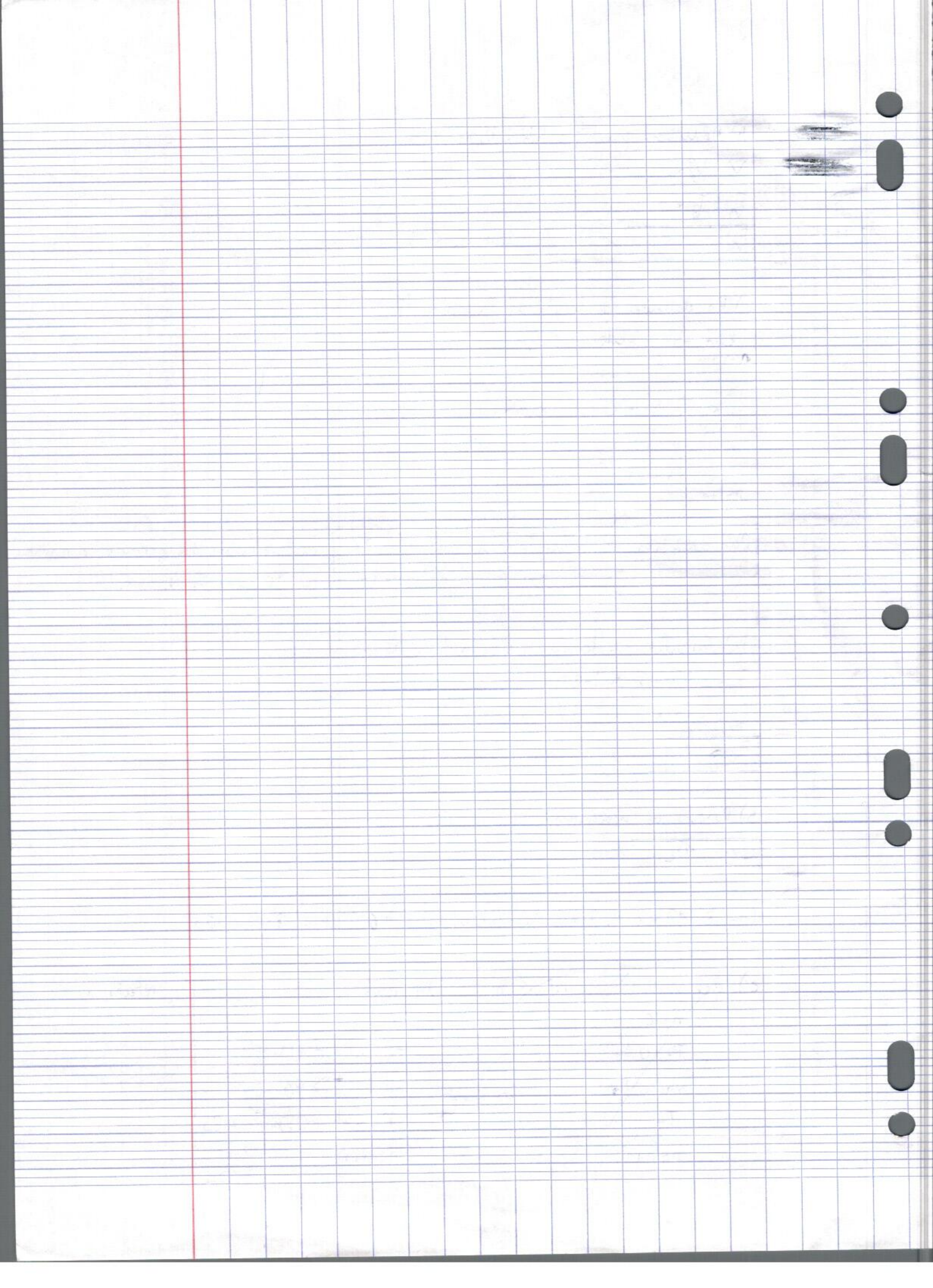
$$T = -44 \times 0,94^n + 25$$

while $T > 10$

$$T = -44 \times 0,94^{n+1} + 25$$

$$n = n + 1$$

return n



Jeu 29 Septembre 2022

Bac Blanc - Maths

1280
J°E

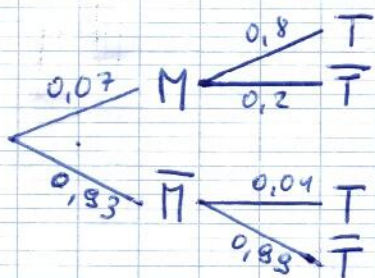
16,75
20

Exercice 1 -

1) Calculons $P(\Pi \cap T)$: "La personne est malade et positif" :

$$\begin{aligned} P(\Pi \cap T) &= P(\Pi) \times P_{\Pi}(T) \\ &= 0,07 \times (0,2 + 1) \\ &= 0,07 \times 0,8 \\ P(\Pi \cap T) &= 0,056 \end{aligned}$$

Représentation de la situation :



$$P(\bar{T}) = 1 - 0,01 = 0,99$$

$$P(\bar{\Pi}) = 1 - 0,07 = 0,93$$

2) Calculons $P(T)$: "le test de la personne est positif" :

1) après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(\Pi \cap T) + P(\bar{\Pi} \cap T) \\ &= 0,056 + 0,93 \times 0,01 \quad \text{d'après question 1)} \\ P(T) &= 0,0653 \end{aligned}$$

3) Dans un contexte de dépistage, il est plus pertinent de savoir si la personne est malade sachant que son test est positif. Il est donc plus pertinent de connaître $P_+(M)$.

4) Calculons $P_+(M)$: "la probabilité que la personne est malade sachant que son test est positif":

D'après la formule des probabilités composées:

$$P_+(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$$
$$= \frac{0,056}{0,0653} \quad \text{d'après questions 1) et 2)}$$

$$P_+(M) \approx 0,86$$

5) a) Démontrons que X suit une loi binomiale:

- Démontrons que c'est une situation de Bernoulli:

- "On choisit une personne aléatoire et on regarde si le test est positif" est une situation de Bernoulli.

- Succès: "le test est positif"

- $p = P(T) = 0,0653$ d'après question 2)

- Cette situation est répétée 10 fois à l'identique et de manière indépendante, donc c'est un schéma de Bernoulli.

Ainsi, on peut dire que X est un compteur du nombre de personnes ayant un test positif et donc:

$$X \sim B(10; 0,0653)$$

b) Calculons $P(X=2)$: "Exactement 2 personnes ont un test positif":

1280

$$\begin{aligned}
 P(X=2) &= \binom{10}{2} p^2 \times (1-p)^{10-2} \\
 &= \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times 0,9347^8 \\
 &= \frac{10!}{2!(10-2)!} \times 0,0653^2 \times 0,9347^8
 \end{aligned}$$

$$P(X=2) \approx 0,11 \quad \text{Avec calculatrice}$$

6) On sait $P(X=2) \approx 0,11$:

Ainsi, $1 - P(X=2) \approx 0,99$

$\Leftrightarrow P(X \leq 2) \approx 0,99$

On, $0,99 = 0,99$ *Vous égalez des valeurs approchées!*

Donc $P(X \leq 3) > 0,99$

Ainsi, il faudra au minimum 3 personnes pour que au moins l'une d'entre elles aient un test négatif. Une probabilité d'avoir un test négatif supérieur à 99%.

Ex

Exercice 2 -

I - Déterminons la température des gâteaux après 25 minutes.

À la minute 0, les gâteaux sont à -19°C . Une fois amenés sur la terrasse, les gâteaux ne fondent pas immédiatement, et à 10 min, les gâteaux sont à $1,3^{\circ}\text{C}$. On remarque une situation de proportionnalité, car la vitesse de décongélation est constante. On peut alors dire :

$$v = \frac{\Delta \text{température}}{\Delta \text{temps}} \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{-19 + 1,3}{10} \\ v = 2,03^{\circ}\text{C}/\text{min}$$

Cherchons pour température temps = 25 :

$$\text{température} = 25 \times 2,03$$

$$\text{température} = 50,75^{\circ}\text{C}.$$

La température à la 25^e minute n'est pas logique, donc le modèle ne semble pas pertinent.

II -

1) ^{pour tout} $n \in \mathbb{N}$, on sait : $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -0,06 \times (T_n - 25) + T_n$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -0,06T_n + 1,5 + T_n$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$$

2) Calculons T_1 et T_2 avec $T_0 = -19$

$$T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5$$

$$T_1 \approx -16,46$$

$$T_2 = 0,94 \times T_1 + 1,5$$

$$= 0,94 \times (-16,36) + 1,5$$

$$T_2 \approx 13, \text{ ~~9784~~ }$$

3) Notons $P(n)$: " $T_n \leq 25$ ", pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrons par récurrence $P(n)$:

• Prouvons $P(0)$:

$$T_0 = -19 \text{ or } -19 \leq 25 \text{ donc}$$

$P(0)$ est vraie.

• Soit $n \in \mathbb{N}$,

Supposons $P(n)$: " $T_n \leq 25$ " vraie, démontrons
 $P(n+1)$: " $T_{n+1} \leq 25$ ".

D'après la ~~formule de récurrence~~:

$$T_{n+1} \leq 25$$

$$\Leftrightarrow 0,94 T_n \leq 23,5 \text{ or } \dots$$

$$\Leftrightarrow 0,94 T_n + 1,5 \leq 25$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} \leq 25$$

d'après l'énoncé
 $P(n+1)$ est alors vérifiée.

On a donc démontré par récurrence que:
 $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \leq 25$

4) On a: $T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$

Remplaçons la suite (T_{n+1}) par une fonction
 $f(x)$: $x \mapsto 0,94x + 1,5$

Calculons la dérivée de $f(x)$:

$$f(x) = 0,94x + 1,5$$

$$f'(x) = 0,94$$

$$\text{or, donc } 0,94 > 0$$

La fonction $f^*(x)$ est croissante et croissante sur $\mathbb{R}$.

On peut donc dire que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante sur $[-19; 25]$, car $T_n \leq 25$.

5) À l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et bornée. On, d'après le théorème de la limite monotone, toutes suites réelles croissantes et majorées sont convergentes et bornées par leur premier terme et leur majorant ici : $-19 \leq T_n \leq 25$.

6) a) On sait $U_n = T_n - 25$

(U_n) géométrique si, $U_{n+1} = q \times U_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= T_{n+1} - 25 \\ &= 0,94T_n + 1,5 - 25 \\ &= 0,94T_n - 23,5 \\ &= 0,94(T_n - 25) \end{aligned}$$

$$U_{n+1} = 0,94 U_n$$

Ainsi, (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,94$ et de premier terme $U_0 = -44$.

b) On a : $U_0 = -44$ et $q = 0,94$

La suite (U_n) est définie par :

$$U_n = -44 \times 0,94^n$$

$$\text{Or, } T_n = U_n + 25$$

$$\Leftrightarrow T_n = -44 \times 0,94^n + 25 \quad \text{d'après l'énoncé.}$$

c) Déduisons la limite de (T_n) :

$$T_n = -44 \times 0,94^n + 25$$

or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = 0$ car $0,94 < 1$, et par

produit: $\lim_{n \rightarrow +\infty} -44 \times 0,94^n = 0$, et par

addition: $\lim_{n \rightarrow +\infty} -44 \times 0,94^n + 25 = 25$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +25$.

On peut finalement dire que la température maximale atteinte par le gâteau sera proche de 25°C .

7) a) Calculons T_{30} : la température après une demi-heure

$$T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25$$

$$T_{30} \approx 18^\circ\text{C}$$

b) ~~Déterminons T_m pour $T_m \leq 10$~~

Déterminons m pour $T_m \leq 10 \leq T_{m+1}$

$$T_{17} \leq 10 \leq T_{18} \Leftrightarrow 9,6 \leq 10 \leq 10,6$$

Gélie doit alors manger son gâteau entre la 17^e et la 18^e minute pour l'apprécier.

c) def seuil():

$$m = 0$$

$$T = -19$$

while $T \leq 10$:

$$T = -44 \times 0,94^m + 1,5$$

$$m = m + 1$$

return m

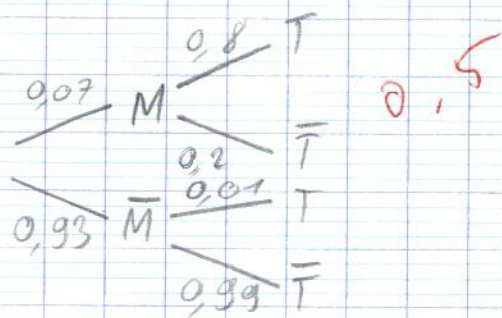
Bac Blanc Math

$$\frac{15,25}{20}$$

T_A
1290

Exercice 1:

1) On représente l'arbre pondéré :



Calculons $IP(M \cap T)$:

$$IP(M \cap T) = IP(M) \times IP(T) = 0,07 \times 0,8 = \underline{0,056}$$

2) On cherche à démontrer $IP(T)$:

Par définition :

$$IP(T) = IP(M \cap T) + IP(\bar{M} \cap T) = 0,056 + 0,93 \times 0,01 = \underline{0,0653}$$

3) Lors d'un dépistage il est plus pertinent de connaître $P_1(M)$: "la probabilité que la personne soit malade sachant que le test est positif" car elle permet de savoir si la personne est bien malade ou si le test s'est trompé.

4) On cherche à déterminer $IP_T(M)$

Par définition :

$$IP_T(M) = \frac{IP(M \cap T)}{IP(T)}$$

$$= \frac{0,056}{0,0653} \approx 0,86$$

5) On a ici un schéma de Bernoulli de paramètre $n=10$ car 10 personnes sont choisies de manière aléatoire et indépendante, due à la taille de la population du pays, et de paramètre $p = 0,0653$ qui représente le succès: "la personne a un test positif". On a donc:

$$X \sim B(10; 0,0653)$$

6) Calculons $IP(X=2)$:

$$IP(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$IP(X=2) = \frac{10!}{2!(10-2)!} \times 0,0653^2 \times (1-0,0653)^{10-2}$$

$$\approx 0,11$$

6) Déterminons $IP(X) > 0,99$

$$IP(X > 1) = 1 - IP(X \leq 1)$$

$$= 1 - IP(X \leq 0)$$

D'après la calculatrice c'est à $IP(X \leq 3)$ que la probabilité que au moins une personne ait un test positif commence à être supérieure à 0,99. Il faut donc interroger au moins 3.

$$\frac{15,25}{20}$$

T_A
1290

Exercice 2:

I)

On cherche à trouver de combien la température augmente chaque minute, on a, à 10 minutes:

$$-19 + 10 \times x = 1,3$$

$$10x = 20,3$$

$$x = 2,03 \quad \checkmark$$

$\checkmark$

La température augmente donc de $2,03^\circ\text{C}$ chaque minute.
Calculons la température à 25 minutes:

$$-19 + 25 \times 2,03 = \underline{31,75^\circ\text{C}} \quad \checkmark$$

$\checkmark$

Ce modèle^{me} semble pas pertinent car la température du gâteau ne peut pas dépasser la température extérieure de 25°C .

II)

1) On a $\otimes T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$ $\checkmark$

$$T_{n+1} - T_n = 1,5 - 0,06 T_n$$

$$T_{n+1} = 1,5 + 0,94 T_n$$

0,94

$\downarrow$ un peu court

$$2) T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5 \\ \approx -16,4$$

✓

$$T_2 = 0,94 \times (-16,4) + 1,5 \\ \approx -13,9$$

3) Notons: $P(n): T_n \leq 25, \forall n \in \mathbb{N}$

Indiquez le procédé.

* On cherche à savoir si $P(0)$ est vraie.

$$P(0): T_0 \leq 25$$

$$T_0 = -19$$

0,5

on a donc: $-19 \leq 25$ donc

$P(0)$ est vraie.

$\forall n \in \mathbb{N}?$

* Supposons que $P(n)$ est vraie (ici?) déterminons $P(n+1)$:

$$T_{n+1} \leq 25? \text{ Fini?}$$

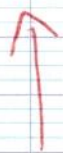
D'après l'hypothèse de récurrence:

$$T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5 \leq 25$$

$$0,94 T_n \leq 23,5$$

$$T_n \leq 25$$

0,25



0,25

On a prouvé par récurrence que $T_n \leq 25$.

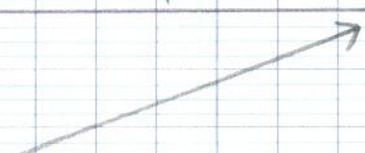
Le résultat était en effet prévisible lorsque l'on a vu le module 1.

4) On prend une fonction $f(x) = 0,94x + 1,5$ qui représente T_n et on étudie sa variation: $f'(x) = 0,94$

monoton

③

4 suite)

x	0	$+\infty$
f'		+
f		

0,25

 T_n est strictement croissante.

0,15

5) Avec la calculatrice on peut conjecturer que T_n converge vers 25.6) a) Li: $U_n = T_n - 25, \forall n \in \mathbb{N}$, alors

$$U_0 = T_0 - 25 = -19 - 25 = -44$$

$$U_1 = T_1 - 25 = -16,4 - 25 = -41,4$$

$$U_2 = T_2 - 25 = -13,9 - 25 = -38,9$$

Pour trouver la raison q on calcule :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-38,9}{-41,4} \approx 0,94 \text{ et } \frac{U_1}{U_0} \approx 0,94$$

0,25

On a ~~donc~~ une suite géométrique U_n de raison $q = 0,94$ et de premier terme $-44 = U_0$.b) Sachant que U_n est géométrique, on a :

$$U_n = U_0 \times 0,94^n$$

$$\text{Donc: } U_0 \times 0,94^n = T_n - 25$$

$$U_0 \times 0,94^n + 25 = T_n$$

$$\text{Donc } T_n \text{ est bien égal à : } -44 \times 0,94^n + 25$$

1

c) On sait que $-1 < q < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n \rightarrow 0$

Par produit $-44 \times 0,94^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ✓

Donc par somme : $-44 \times 0,94^n + 25 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 25$ ✓

On peut donc dire que :

✓ $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n \rightarrow 25$

7a) Calculons T_{30} :

0,5 $T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25 = \cancel{18}$

Au bout d'une demi-heure la température atteinte par le gâteau sera égale à 18°C

b) D'après la calculatrice :

$$T_{17} = -44 \times 0,94^{17} + 25 \approx 9,6$$

$$T_{18} = -44 \times 0,94^{18} + 25 \approx 10,5$$

0,5 Elle doit donc déguster son gâteau entre 17 et 18 minutes après l'avoir sorti.

c) def seuil() :

$n = 0$

$T = (-19)^n$ ✓

while $T < 10$:

0,75 $T = \cancel{(-44)} * 0,94^{**} n + 25$

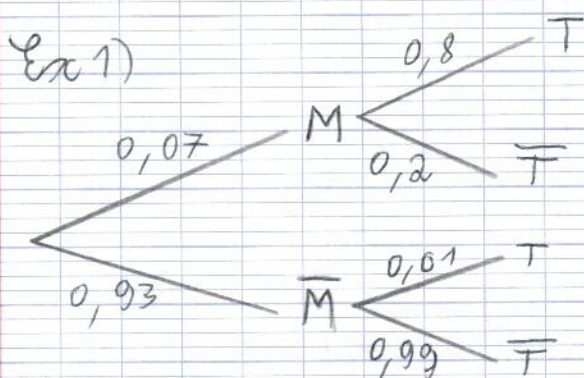
$n = n + 1$

return n

Doc blanc de Maths

TE
1360

$$\frac{17,25}{20}$$



0,5

1) Calculons $P(M \cap T)$

2) après la formule des probabilités composées

$P(M) \neq 0$ donc:

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T)$$

$$= 0,07 \times 0,8$$

$$P(M \cap T) = 0,056$$

2) Démontrons $P(T) = 0,0653$

2) après la formule des probabilités totales

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$$

2) après la formule des probabilités composées

$P(M) \neq 0$ et $P(\bar{M}) \neq 0$ donc:

$$P(T) = P(M) \times P_M(T) + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T)$$

$$= 0,056 + 0,93 \times 0,01$$

$$P(T) = 0,0653$$

3) Dans ce contexte il serait plus pertinent de connaître $P_T(M)$

4) Calculons $P_T(M)$

* $P(T) \neq 0$ donc:

D'après la définition des probabilités conditionnelles

$$\begin{aligned} P_T(M) &= \frac{P(M \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{0,056}{0,0653} \\ &\approx 0,86 \end{aligned}$$

5) Démontrons qu'il s'agit d'une ^{schéma} épreuve de Bernoulli et que X compte son nombre de succès

* Épreuve de Bernoulli:

↑ interroger une personne est une épreuve de Bernoulli son succès est l'individu est testé positif et son paramètre est $p = 0,0653$

* Schéma de Bernoulli:

L'épreuve de Bernoulli est répétée $n = 10$ fois à l'identique et de façon indépendante

~~$B(0,0653; 10)$~~

* X compte le nombre de individus testés positifs donc X compte le nombre de succès du schéma de Bernoulli.

Par conséquent: $X \rightarrow B(0,0653; 10)$

1366

TE

b) Calculons $P(X=2)$

D'après la question précédente:

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(0,0653; 10)$ donc:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times 0,9347^8$$

$$= \frac{10!}{2! \times 8!} \times 0,0653^2 \times 0,9347^8$$

$$\approx 0,11$$

1,5

b) Calculons $E(X)$

D'après la question précédente:

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(0,0653; 10)$ donc:

$$E(X) = np$$

$$= 10 \times 0,0653$$

$$= 0,653$$

En moyenne il faudrait au moins 0,653 personnes à tester pour qu'au moins l'une d'entre elle soit positif.

Ex 2) I) Déterminons la température des gâteaux après 25 min

$$\frac{1,3}{1,0} = 0,13$$

$$1,3 - (-19)$$

$$+19 \rightarrow 1,3 = 20,3^\circ\text{C}$$

$$\frac{20,3}{10} = 2,03^\circ\text{C}$$

0,5

$$2,03 \times 25 = 50,75^\circ\text{C}$$

La température des gâteaux après 25 min est de 50,75°

1 Le modèle ne me semble pas pertinent, car...

II) 1)

$$T_{n+1} - T_n = -0,06(T_n - 25)$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} - T_n = -0,06T_n + 1,5$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -0,06T_n + T_n + 1,5$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$$

$$2) T_1 = 0,94T_0 + 1,5$$
$$= 0,94(-19) + 1,5$$

$$\approx -16,4$$

$$\approx -16,4$$

$$T_2 = 0,94T_1 + 1,5$$
$$= 0,94(-16,4) + 1,5$$
$$\approx -13,9$$

$$3) \forall n: T_n \leq 25$$

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

* initialisation

$$T_0 = -19$$

$$-19 \leq 25$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

* hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence -

$$T_n \leq 25$$

$$0,94T_n \leq 23,5 \text{ car } 0,94 > 0$$

$$0,94T_n + 1,5 \leq 25$$

$$T_{n+1} \leq 25 \text{ car } T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$$

TE
1360

Donc $P(n+1)$ est vraie

On a démontré par récurrence que:

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leq 25$

Qui il était prévisible ~~car...~~

~~$T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$~~

0,5

5) On peut conjecturer que (T_n) converge vers 25

6) ~~$u_n = T_n - 25$~~ $u_{n+1} = T_{n+1} - 25$
 $u_{n+1} = (0,94T_n + 1,5) - 25$
 $= 0,94T_n - 23,5$
 $= 0,94(T_n - 25)$
 $u_{n+1} = 0,94u_n$

Donc (u_n) est géométrique de raison $q = 0,94$ et terme initiale $u_0 = -44$

b) III D'après la question précédente (u_n) est géométrique donc:

$$u_n = u_0 \times q^n$$
$$= -44 \times 0,94^n$$

$$u_n = T_n - 25 \quad \text{donc} \quad T_n = u_n + 25$$
$$= (-44 \times 0,94^n) + 25$$
$$= -44 \times 0,94^n + 25$$

c)

$$-1 < 0,94 < 1 \text{ donc } 1$$

$$0,94^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

par produit

$$-44 \times 0,94^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

par somme

$$-44 \times 0,94^n + 25 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 25$$

0,5 7) a) $T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25$
 $\approx 18,1^\circ\text{C}$

b) $9,6 \leq 10 \leq 10,5$
 $T_{17} \leq 10 \leq T_{18}$
 $17_{\min} \leq 10 \leq 18_{\min}$ Phrase en français.

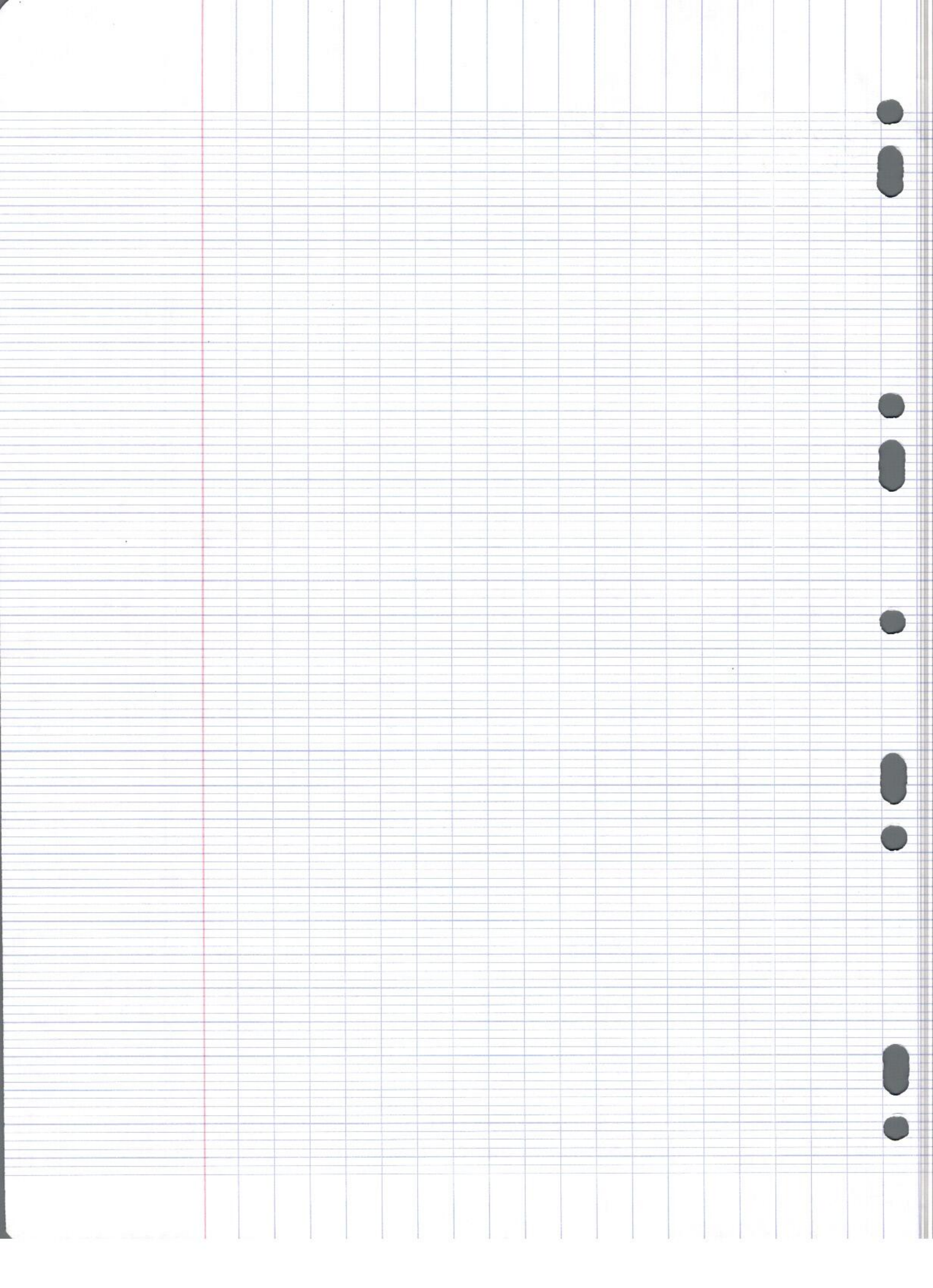
c) def seuil():
 $n = 0$
 $T = -19$
 while $T > 10$:
 $T = 0,94 * T + 25$
 $n = n + 1$
 return n

0,25 4) $G(n): \uparrow \min T_{n+1} \leq T_n \uparrow$
 Démontrons par récurrence que $G(n)$ est vraie
 * initialisation:
 $T_0 = -19$ $T_1 = -16,4$ $-16,4 \leq -19$
 * hérédité
 Soit $n \in \mathbb{N}$
 Supposons $G(n)$ est vraie, démontrons que

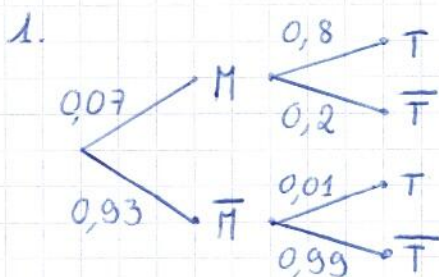
$\hat{C}(n+1)$ est vraie
D'après

7E

1360



1370

$$\frac{9,75}{20}$$
Exercice 1:

$$\begin{aligned}
 P(M \cap T) &= P(M) \times P_T(T) \\
 &= 0,07 \times 0,8 \\
 &= 0,056
 \end{aligned}$$

$$P(\bar{M} \cap T) = 0,056$$

$$2. \quad P(T) = P_T(T) \times P(\bar{M} \cap T)$$

$$\begin{aligned}
 P(T) &= P(M \cap T) \times P_T(T) \\
 &= 0,056 \times 0,8
 \end{aligned}$$

$$P(T) = 0,0448$$

3. Il est plus pertinent de connaître $P_T(T)$, car par exemple on peut voir si il y a beaucoup de tests positifs pour peu de malade, ce qui serait bien pertinent ici.

4. On considère $P(T)$, trouvons $P_T(M)$:

$$\begin{aligned}
 P_T(M) &= \frac{P(M \cap T)}{P(T)} \\
 &= \frac{0,056}{0,0448}
 \end{aligned}$$

$$P_T(M) = 0,8 = 0,008 \times 10^{-2}$$

 $P_1/4$

5. Déterminons si X suit un schéma de Bernoulli.

* Épreuve de Bernoulli

- On choisit une personne au hasard et on regarde si elle a un test positif
- succès : "le test est positif"
- $p = 0,0653$

* Schéma de Bernoulli

- l'épreuve se répète $n=10$ fois de façon indépendante et à l'identique
- $X \rightarrow B(10; 0,0653)$

a) $n=10$ et $p=0,0653$

b) $\{X=2\}$ alors $P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1-0,0653)^{10-2}$

$$= \frac{10!}{2!(10-2)!} \times 0,00426409 \times 0,5826100092$$
$$= \frac{3628800}{80640} \times 0,0024843015$$

$$P(X=2) = 0,1117935681 \approx 11,18 \times 10^{-2}$$

6. ~~$\{X < \dots\}$~~

• $\{X \geq 1\}$ alors $P(X \geq 1) = 1 - P(\overline{X \geq 1})$

$$= 1 - P(X \leq 0)$$

$$P(X \geq 1) = 0,0235986675$$

Il faudra donc tester au minimum 2 personnes pour avoir un test positif.

Exercice 2:

I - Premier modèle

En 25 min après la sortie les gâteaux sont à $31,75^\circ\text{C}$.

Non il a fallu $20,3^\circ\text{C}$ en 10 minute donc $=(20,3 \times 2) + 10,15 - 19$

$$= 31,75^\circ\text{C}$$

P2/4

Non ce modèle n'est pas pertinent car il suppose une augmentation constante de la température.

II - Second modèle

1370

T.Hath

1. ~~Démontrons par récurrence que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a~~

$$T_{m+1} = 0,94T_m + 1,5$$

~~* Initialisation:~~

$$P(0): "u_0 = -19"$$

Justifions $P(n+1): "T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5" \forall n \in \mathbb{N}$, d'après l'énoncé

$$T_{m+1} = -0,06 \times (T_m - 25) + T_m$$

$$= -0,06T_m + 1T_m + 1,5$$

$$T_{m+1} = 0,94T_m + 1,5$$

donc $P(n+1)$ est vraie

$$2. T_1 = 0,94(-19) + 1,5 \quad / \quad T_2 = 0,94(-16,36) + 1,5$$

$$T_1 = -16,36$$

$$T_2 \approx -15,38$$

3. Démontrons par récurrence que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $T_m \leq 25$

* Initialisation

$$P(0): "T_0 = -19"$$

$$\text{or } T_0 = -19 \leq 25$$

alors $P(0)$ est vraie

* Hérité

Supposons $P(n)$ vraie, démontrons $P(n+1): "T_{n+1} \leq 25"$

pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T_{n+1} \leq 25$$

$$0,94T_n + 1,5 \leq 25$$

$$0,94T_n \leq 23,5$$

$$T_n \leq \frac{23,5}{0,94}$$

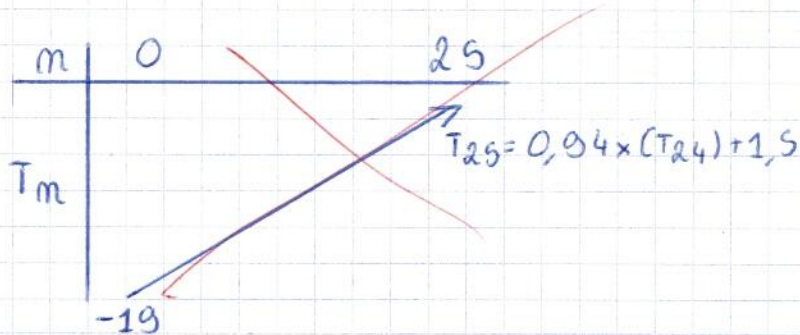
$$T_n \leq 25$$

Donc $P(n)$ est vraie

Raisonnement en l'envers.

0,25 Qui ce résultat était prévisible car les résultats restent en effet en dessous de 25.

4. T_m est croissante de 0 à 25 donc $0 \leq T_m \leq 25$, alors



0,5 5. On peut donc conjecturer d'après le théorème de la limite monotone que la suite (T_m) qui est croissante et ayant pour majorant 25 est convergente

6. a) (u_m) est une suite géométrique car

$u = T_m - 25$ et $u_0 = -44$

b) $T_m = u_0 \times T_{m+1} + u_m$
 $T_m = -44 \times 0,94^m + 25$

c) $u_0 \leq u_m \leq u_2$
ils ont pour limite $\lim_{m \rightarrow \infty} (u_m) = -\infty$

7. a) $= (20,3 \times 3) - 19$ d'après le premier modèle
 $= 41,9 = 42^\circ \text{C}$

b) $[13; 14]$

c) def seuil():

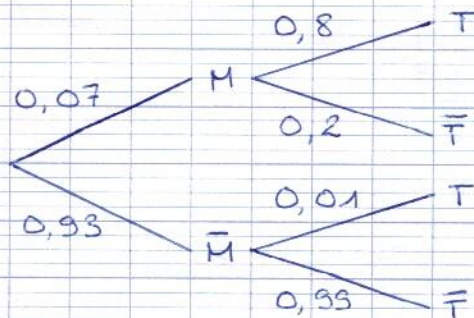
```
m = 0
T = -19
while T < 10:
    T = 0,94 * T_m + 1,5
    m = m + 1
return m
```


1540

$$\frac{17,5}{20}$$

Exercice 1

1



0,5

Calculons $P(M \cap T)$

D'après la formule des probabilités composées :

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_H(T)$$

Puisque $P(M) > 0$, avec l'arbre, on voit que :

$$\begin{aligned} P(M \cap T) &= 0,07 \times 0,8 \\ &= 0,056 \end{aligned}$$

$$P(M \cap T) = 0,056$$

2 Démontrer que $P(T) = 0,0653$

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$$

$$= 0,056 + 0,93 \times 0,01$$

$$= 0,0653$$

On a donc démontré que $P(T) = 0,0653$

3 $P_H(T)$ ou $P_T(M)$?

$P_T(M)$ semble plus pertinent car $P_T(M) > P_H(T)$
donc reflète ~~le~~ mieux le résultat.

4 On cherche $P_T(M)$

D'après la formule des probab. ~~plus composées~~:

$$P_T(M) = \frac{P(M|T)}{P(T)}$$

$P(T) \neq 0$ donc :

$$P_T(M) = \frac{0,056}{0,0653} \approx 0,86$$

$$P_T(M) \approx 0,86$$

5a Epreuve de Bernoulli:

- Choisir une personne au hasard et regarder si son test est positif est une épreuve de Bernoulli
- Succès: "la personne choisie a un test positif"
- $p = 0,0653$

Schéma de Bernoulli

L'épreuve de Bernoulli est répétée $n = 10$ fois de façon identique et indépendante ("tirage avec remise")

Cette expérience est donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,0653$

La Binomiale

La variable X donne le nombre d'individus ayant un test positif, i.e. le succès, donc :

$$X \hookrightarrow B(10; 0,0653)$$

b On cherche $P(X=2)$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$\text{donc : } P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1-0,0653)^{10-2}$$

$$= \frac{10!}{2!(10-2)!} \times 0,0653^2 \times 0,9347^8$$

$$= \frac{3628800}{2 \times 40320} \times 0,0653^2 \times 0,9347^8$$

$$\approx 0,11$$

$$P(X=2) \approx 0,11$$

Exercice 2

I Premier modèle

1540

On modélise la situation par une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
D'après l'énoncé ("La vitesse de décongélation est constante", "l'augmentation de la température est la même minute après minute"), la suite U_n est arithmétique. ✓

$$\text{Donc } U_n = U_0 + (n-p)r \quad -$$

On sait également que $U_0 = -19$ et $U_{10} = 1,3$
~~et on cherche U_{25} .~~

~~$$U_{25} = U_0 + 25r$$~~

$$U_{10} = U_0 + 10r$$

$$1,3 = -19 + 10r$$

$$\text{donc : } 10r = 20,3 \quad \text{soit } r = 2,03$$

On cherche U_{25} ✓

$$U_{25} = U_0 + (25-0)r \quad -$$

$$= -19 + 25 \times 2,03 \quad -$$

$$= 31,75 \quad \checkmark$$

La température des gâteaux 25 minutes après leur sortie du congélateur est de $31,75^\circ\text{C}$.

Le modèle semble pertinent car il modélise bien le phénomène, en réalité dans la

II Second modèle

1 Justifier que pour tout entier naturel n , on a

$$T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} - T_n = -0,06(T_n - 25)$$

$$\text{donc } T_{n+1} = -0,06(T_n - 25) + T_n$$

$$= -0,06T_n + 1,5 + 1T_n$$

$$= \boxed{0,94T_n + 1,5}$$

1

2 Calculer T_1 et T_2

$$T_1 = 0,94T_0 + 1,5$$

$$= 0,94 \times (-13) + 1,5$$

$$\approx \boxed{-16,4}$$

~~1~~

$$T_2 = 0,94T_1 + 1,5$$

$$= 0,94 \times (-16,4) + 1,5$$

$$\approx \boxed{-13,9}$$

1

3 Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $T_n \leq 25$

Soit P_n : " $T_n \leq 25$ "

Initialisation:

$$T_0 = -13 \leq 25 \quad P(0) \text{ est vraie}$$

Hérédité:

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons $P(n)$ vraie et démontrons que $P(n+1)$ l'est aussi.

$$T_n \leq 25 \quad (\text{Hypothèse de récurrence})$$

$$T_{n+1} \leq 25 \quad (\text{à démontrer})$$

D'après l'Hypothèse de récurrence,

0,5

$$T_n \leq 25$$

donc $0,95T_n \leq 25 \times 0,95$ *car...*

$$0,95T_n + 1,5 \leq 23,5 + 1,5$$

$$T_{n+1} \leq 25$$

$P(n+1)$ est vraie ✓

Conclusion

On a donc démontré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n \leq 25$$

En revenant à la situation étudiée, ce résultat n'était pas prévisible car il semblait que

$$T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

mais ce n'est pas le cas.

Par récurrence,

4 Montrons que $T_n < T_{n+1}$ pour tout entier naturel

* $T_0 < T_{0+1}$ *car.*

$$-13 < -16,4 \text{ donc } P(0) \text{ vraie}$$

* Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons $P(n)$ vraie et démontrons $P(n+1)$ vraie

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$T_n < T_{n+1}$$

donc $0,95T_n < 0,95T_{n+1}$ *car...*

$$0,95T_n + 1,5 < 0,95T_{n+1} + 1,5$$

$$T_{n+1} < T_{n+2} \quad \checkmark$$

$P(n+1)$ vraie

* On a donc démontré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n < T_{n+1}$$

La suite est donc strictement croissante.

0,5

5. À l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que la suite (T_n) converge vers 25.

6a. Montrer que (U_n) est géométrique.

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = T_n - 25$$

$$\text{donc : } U_{n+1} = T_{n+1} - 25$$

$$= 0,94T_n + 1,5 - 25$$

$$= 0,94(U_n + 25) + 1,5 - 25$$

$$= 0,94U_n + 23,5 + 1,5 - 25$$

$$= 0,94U_n$$

(U_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,94$ et de 1^{er} terme $U_0 = T_0 - 25$ soit $-19 - 25 = -44$ $U_0 = -44$ $U_n = -44 \times 0,94^n$

b. Sachant que $U_n = T_n - 25$

$$T_n = U_n + 25$$

$$\text{donc } T_n = -44 \times 0,94^n + 25$$

c. En déduire la limite de (T_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = 0$$

par multiplication :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -44 \times 0,94^n = 0$$

par addition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -44 \times 0,94^n + 25 = 25$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 25$$

Après n minutes sortie du congélateur, lorsque n tend vers l'infini, les gâteaux seront à 25°C .

1.2 On cherche T_{30}

$$T_n = U_n + 25$$

$$T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25$$

$$\approx 18$$

La température des gâteaux, au bout de 30 min, sera de 18°C .

b On cherche $T_n = 10$

$$T_{17} = -44 \times 0,94^{17} + 25$$

$$\approx 9^\circ\text{C}$$

$$T_{18} = -44 \times 0,94^{18} + 25$$

$$\approx 10^\circ\text{C}$$

$$T_{17} < 10 \leq T_{18}$$

Cécile doit déguster son gâteau entre P_{17} et P_{18} minute si elle veut que celui-ci soit à la température de 10°C .

c def `seriP()`:

$$n = 0$$

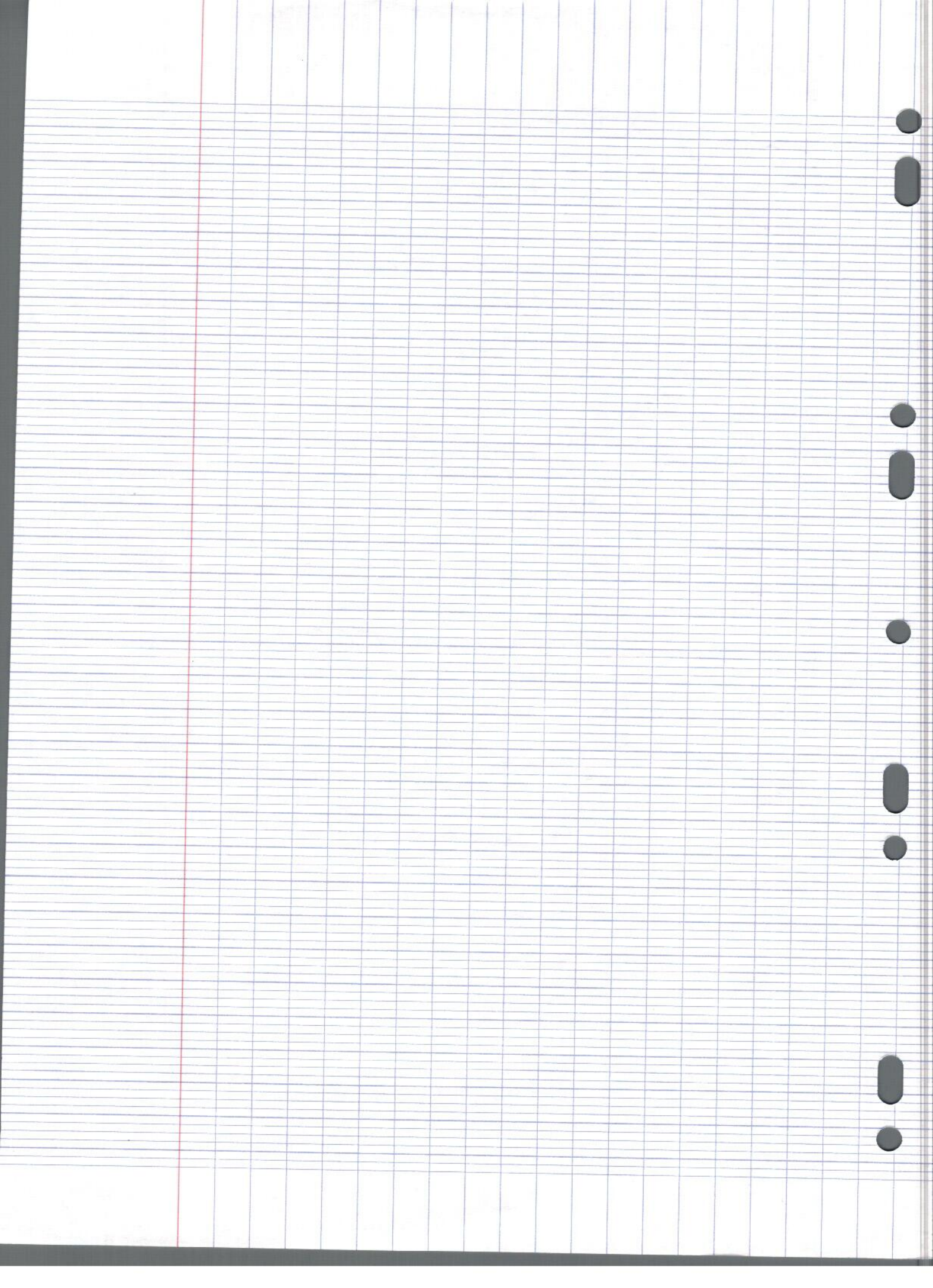
$$T = -19$$

while $T < 10$:

$$T = -44 \times 0,94^n + 25$$

$$n = n + 1$$

return n



Jeudi 29 Septembre 2022

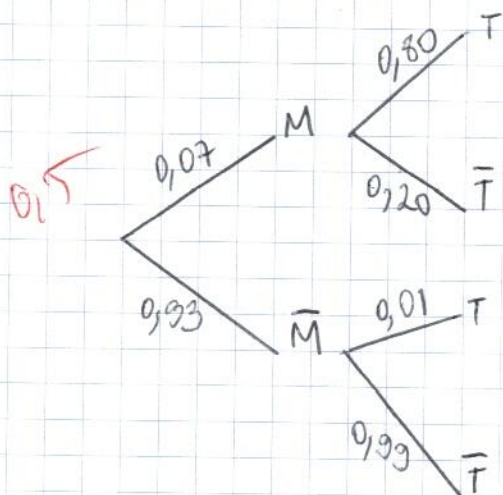
TE

Bac Blanc Maths

15,25
20

1510

Exercice 1 1) Représentons la situation par un arbre pondéré:



On cherche à déterminer la probabilité que la personne est à la fois malade et présente un test positif i.e $P(M \cap T)$

Calculons $P(M \cap T)$

D'après la définition des probabilités conditionnelles :

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T)$$

$$= 0,07 \times 0,80$$

$$= \underline{0,056}$$

2) Démontrons que la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif est de 0,0653 i.e $P(T) = 0,0653$

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) \quad \text{où } P(M \cap T) \text{ vaut } 0,056 \text{ d'après 1)}$$

$$= 0,056 + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T)$$

$$= 0,056 + 0,93 \times 0,01$$

$$= \underline{0,0653}$$

3) D'après le contexte de dépistage de la maladie, il est plus pertinent de connaître $P_T(M)$ car si la personne est déjà malade le test aura de plus grande chance d'être positif.

Pravons le ; d'après la définition des probabilités conditionnelles :

$$\text{On a : } P_M(T) = \frac{P(M \cap T)}{P(M)} = \frac{0,056}{0,07} = 0,8$$

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,056}{0,0653} \approx 0,86$$

D'où $P_T(M) > P_M(T)$

Ainsi il est plus pertinent de calculer $P_T(M)$.

4) On cherche à déterminer la probabilité qu'il soit malade sachant qu'il a eu un test positif i.e $P_T(M)$.

D'après la définition des probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned} P_T(M) &= \frac{P(M \cap T)}{P(T)} \quad \text{d'où } P(M \cap T) = 0,056 \text{ obtenue dans la 1)} \\ &= \frac{0,056}{0,0653} \quad \text{et } P(T) = 0,0653 \text{ obtenue dans la 2)} \\ &\approx 0,86 \end{aligned}$$

Ainsi $P_T(M) \approx 0,86$

5) a) justifions qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli :

- Veufons si la personne présente un test positif est une épreuve de Bernoulli.

- Succès : "la personne présente un test positif"

- $p = \frac{1}{2}$

L'expérience est répétée $n = 10$ fois de façon indépendante et é l'identique.

L'expérience est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$.

D'où X donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes i.e X compte le nombre de succès de l'expérience.

Donc $X \hookrightarrow B(10, \frac{1}{2})$

b) Déterminons la probabilité qu'exactly deux personnes aient un test positif: 1510

TE

On sait d'après 5b) que X suit une loi binomiale d'où $P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

$$\text{donc } P(X=2) = \binom{10}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-2}$$

$$= \frac{10!}{2!(10-2)!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$= \frac{45}{1024}$$

$$\approx 0,04$$

0,75

$$\text{Ainsi } P(X=2) \approx 0,04$$

$$6) P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 0) \\ = 1 - P(X=0)$$

0,25

Exercice 2 :

I - Premier modèle

Au bout de 10 min, la température des pates est de $1,3^\circ\text{C}$.

Or il était initialement à $-1,9^\circ\text{C}$.

On cherche à déterminer au bout de 25 min, quelle sera la température

$$\text{Ainsi } \frac{25 \times 1,3}{10} = 3,25^\circ\text{C}$$

De fait, calculons cette augmentation de température

• $-19 + 3,25 = -15,75$. la température a donc augmenté de $1,575\%$.

• $25 \times 1,575 \approx 39^\circ\text{C}$

on $39^\circ\text{C} > 25^\circ\text{C}$

Le modèle ne semble pas pertinent et on donne que la température du gâteau est supérieur à l'air ambiant.

II - Second modèle

1) on sait d'après l'énoncé que $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$
d'où $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$

$$T_{n+1} - T_n = -0,06 \times T_n - 0,06 \times (-25)$$

$$T_{n+1} - T_n = -0,06 T_n + 1,5$$

$$T_{n+1} = -0,06 T_n + T_n + 1,5$$

$$T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$$

Ainsi $T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$

2) On cherche à déterminer T_1 et T_2 :

D'après 1) on sait que $T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$ et d'après énoncé que $T_0 = -19$

$$\text{Ainsi } T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5 = -16,36 \approx -16,4$$

$$T_2 = 0,94 \times (-16,4) + 1,5 \approx -13,9$$

3) Soit $P(n) : "T_n \leq 25"$

~~Déterminer~~ par récurrence que (T_n) est vraie pour $\forall n \in \mathbb{N}$

0,5 $T_0 = -19 < 25$ donc $P(0)$ est vraie

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $P(n)$ est vraie, et démontrons que $P(n+1)$ l'est aussi.

D'après question 1) et d'après l'hypothèse de récurrence :

$$T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$$

Ainsi

$$T_n \leq 25$$

15-10

TE

$$(\Rightarrow) T_n \times 0,94 \leq 25 \times 0,94 \quad \text{car...}$$

$$(\Rightarrow) T_n \times 0,94 + 1,5 \leq 25 \times 0,94 + 1,5$$

$$(\Rightarrow) 0,94 T_n + 1,5 \leq 25$$

$$(\Rightarrow) T_{n+1} \leq 25$$

0,75 Ainsi $P(n+1)$ est vraie ✓

* On a démontré par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \leq 25$

0,25 Le résultat était prévisible car la température des poteaux sera inférieure ou égale à l'air ambiant.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$

d'où d'après 1) $T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$ donc la suite ne sera croissante.

5) Étant donné que la suite (T_n) est croissante et majorée, la suite va dès lors être convergente vers $l \in \mathbb{R}$.

~~Soit $n \in \mathbb{N}$,~~

Déterminons l :

En remplaçant la limite l dans la suite de récurrence (T_{n+1}) donné dans la 1), on a alors:

$$l = 0,94l + 1,5$$

$$(\Rightarrow) l - 0,94l = 1,5$$

$$(\Rightarrow) 0,06l = 1,5$$

$$(\Rightarrow) l = \frac{1,5}{0,06}$$

$$(\Rightarrow) l = \underline{25}$$

Ainsi d'après la calculatrice et le calcul précédent, on peut dire que (T_n) converge vers 25. ✓

0,15

6) Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = T_n - 25$

On veut $\rightarrow (u_n)$ est une suite géométrique ✓
démontrer que

On sait que $u_n = T_n - 25$

~~Démontrons~~ $u_{n+1} = T_{n+1} - 25$

D'après l'hypothèse de récurrence $T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$

d'où $u_{n+1} = T_{n+1} - 25$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5 - 25$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} = 0,94 \left(T_n + \frac{1,5}{0,94} \right)$$

De plus on cherche à déterminer u_0 :

d'où $u_0 = T_0 - 25$ où T_0 donné dans l'énoncé

$$= -19 - 25$$

$$= -44 \quad \checkmark$$

Ainsi la suite (u_n) est géométrique de raison 0,94 et de premier terme $u_0 = -44$.

b) Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$

On sait que u_n est une suite géométrique i.e. $u_n = u_0 \times q^n$

$$\text{Ainsi } u_n = -44 \times 0,94^n$$

On a d'après b), $u_n = T_n - 25$

$$\text{d'où } T_n = u_n + 25$$

$$\text{Ainsi } T_n = -44 \times 0,94^n + 25$$

c) D'après a) et d'après b), la limite de la suite est 25. car $l = 1 - 25 \Leftrightarrow l = 25$

donc la température des gâteaux va atteindre les 25°C .

7) a) Soit $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$

$$\text{d'où } T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25 \approx 18^\circ\text{C}$$

Donc pour une demi-heure, la température sera de 18°C 6/7

7) b) D'après la calculatrice, elle doit ajuster
son gâteau entre 17°C et 18°C 1510

TE

7) c) def seuil ():

$$n = 0$$

$$T = -19$$

while $T < 10$:

$$T = 25 + 0,94 \times T_n$$

$$n = n + 1$$

return n

1550

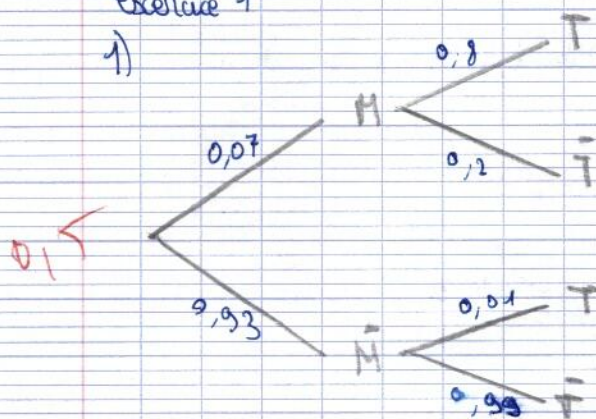
Jeudi 29 Septembre 2022

Rac: blanc Mathématiques

18,75
20

Exercice 1

1)



Calculons $P(M \cap T)$

$P(M) > 0$, donc d'après la formule des probabilités composées :

$$P(M \cap T) = P(M) \times P(T|M)$$

$$= 0,07 \times 0,8$$

$$P(M \cap T) = 0,056$$

2) Calculons $P(T)$

$\{M; \bar{M}\}$ forme un système complet d'événements. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$$

Or, $P(M) > 0$ et $P(\bar{M}) > 0$, donc d'après la formule des probabilités composées :

$$P(T) = P(M) \times P(T|M) + P(\bar{M}) \times P(T|\bar{M})$$

$$P(T) = 0,07 \times 0,8 + 0,93 \times 0,01$$

$$P(T) = 0,0653$$

3) Dans un contexte de dépistage de la maladie, il est plus pertinent de connaître la probabilité que le patient soit malade en sachant que son test est positif, c'est-à-dire $P_+(M)$. Si l'on cherchait à évaluer la fiabilité du test, connaître $P_+(T)$ aurait été plus pertinent.

4) Calculons $P_+(M)$

D'après la définition des probabilités composées, on a :

$$P_+(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$$

Or, d'après les questions précédentes :

$$P(M \cap T) = 0,056$$

et

$$P(T) = 0,0653$$

donc :

$$P_+(M) = \frac{0,056}{0,0653}$$

$$P_+(M) = 0,85758 \approx 0,86$$

5a) Déterminons la loi de probabilité suivie par X .

* "Épreuve de Bernoulli"

- Vérifier si un individu a un test positif ou non est une épreuve de Bernoulli
- Succès : "l'individu a un test positif"
- $p = P(T) = 0,0653$

* "Schéma de Bernoulli"

L'épreuve est répétée $n = 10$ fois de façon indépendante, il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli, de paramètres $n = 10$ et $p = 0,0653$

1550

"loi binomiale"

La variable aléatoire X compte le nombre d'individus ayant un test positif, c'est à dire le nombre de succès. X suit donc une loi binomiale, de paramètres $n = 10$

$$p = 0,0653$$

1,5

$$X \subset B(10; 0,0653)$$

a) Calculons $P(X=2)$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1-0,0653)^8$$

$$P(X=2) = \frac{10!}{2!(10-2)!} \times 0,0653^2 \times (1-0,0653)^8$$

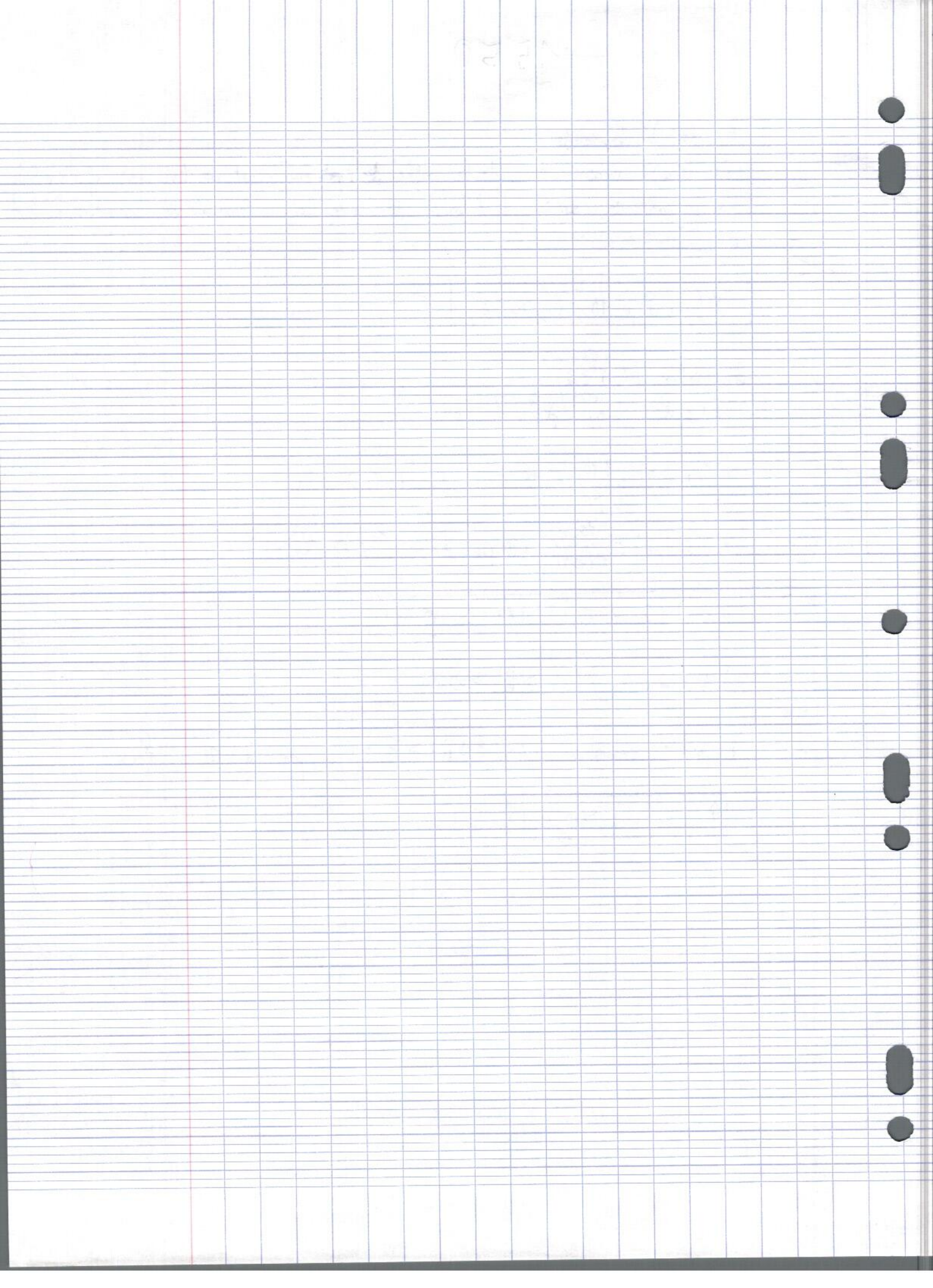
1,5

$$P(X=2) = 0,11179 \approx 0,11$$

b) Déterminons $P(X \geq k) > 0,99$

① d'après la calculatrice, $P(X \geq k) > 0,99$ pour $k=2$. Ainsi:

$$P(X \geq 2) > 0,99$$



1550

exercice 2

I) Premier modèle

Représentons cette situation par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a :

$$u_0 = -19$$

$$u_{10} = -19 + 10 \times \pi$$

$$\pi = 2,03 \text{ cm}^2$$

Calculons u_{25} .

$$u_{25} = -19 + 2,03 \times 25$$

$$u_{25} = 31,75$$

À la fin de 25 minutes, les gâteaux atteindraient $31,75^\circ\text{C}$ selon ce modèle. Cela n'est pas pertinent, car les gâteaux ne peuvent pas dépasser la température ambiante (25°C) sans paramètres externes. Le modèle est donc in pertinent.

II) Second modèle

$$1) T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$$

$$T_{n+1} = -0,06 T_n + 1,5 + T_n$$

$$T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$$

2) Calculons T_1

$$T_1 = 0,94 \times T_0 + 1,5$$

$$T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5$$

$$T_1 = -16,36 \approx -16,4$$

Calculons T_2

$$T_2 = 0,94 \times T_1 + 1,5$$

$$T_2 = 0,94 \times (-16,36) + 1,5$$

$$T_2 = -13,8784 \approx -13,9$$

3) Posons $P(n)$: " $T_n \leq 25$ "

Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

* $-19 \leq 25$, et $T_0 = -19$, donc

$$T_0 \leq 25$$

$P(0)$ est vraie

* Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $P(n)$ est vraie, et démontrons alors que $P(n+1)$ est vraie.

D'après la formule de récurrence:

$$T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$$

D'après l'hypothèse de récurrence:

$$T_n \leq 25$$

$$\text{donc: } 0,94 T_n \leq 23,5$$

$$0,94 T_n + 1,5 \leq 25$$

Or, d'après la formule de récurrence:

$$T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$$

donc:

$$T_{n+1} \leq 25$$

Autrement dit, $P(n+1)$ est vraie.

* On a démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leq 25$.
Ce résultat était prévisible, car la température ambiante est de 25°C : celle des gâteaux est inférieure.

4) Étudions les variations de (T_n)

Soit $f: x \mapsto 0,94x + 1,5$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
définie sur $\mathbb{R}_+$

f s'annule en $\frac{1,5}{0,94}$, c'est à dire en $-1,59$. Or, f n'est pas définie sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi:

x	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$		+
variation de $f(x)$		$\nearrow$

f est croissante sur $\mathbb{R}_+$

1550

6) On remarque que $T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$. Ainsi $f(T_{n+1})$ est croissante, et $T_{n+1} \geq T_n$.
 Par conséquent, (T_n) est croissante.

0,5 5) À l'aide de la calculatrice, l'on peut conjecturer que (T_n) converge vers 25.

6) Démontrons que (u_n) est géométrique.

$$u_n = T_n - 25$$

$$u_{n+1} = T_{n+1} - 25$$

$$u_{n+1} = 0,94T_n + 1,5 - 25$$

$$u_{n+1} = 0,94T_n - 23,5$$

$$u_{n+1} = 0,94(T_n - 25)$$

$$u_{n+1} = 0,94u_n$$

1 (u_n) est géométrique de raison $q = 0,94$ et de terme initial $u_0 = -44$

a) $u_n = u_0 \times q^n$ car...

$$u_n = -44 \times 0,94^n$$

On a $u_n = T_n - 25$

donc $T_n = u_n + 25$

$$T_n = -44 \times 0,94^n + 25$$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 25$

En effet :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = 0$ car... donc par produit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} -44 \times 0,94^n = 0$ et par somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -44 \times 0,94^n + 25 = 25$$

1

Ce résultat prouve qu'au bout d'un très grand nombre de minutes, les gâteaux atteignent 25°C (au maximum).

7) a) Calculons T_{30} .

$$T_n = -44 \times 0,94^n + 25$$

$$T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25$$

$$T_{30} = 18,1247$$

0,5

$$\boxed{T_{30} \approx 18}$$

Au bout d'une demi-heure, les gâteaux ont une température de 18°C .

b) $T_{17} = 9,6317$

$$T_{18} = 10,554$$

0,5

$$T_{17} < T_{\text{optimale}} < T_{18}$$

Géralde doit déguster son gâteau entre 17 et 18 minutes après l'avoir retiré du congélateur.

c)

def seuil():

$$n = 0$$

$$T = -19$$

while $T < 10$:

$$T = -44 \times 0,94^{n+1} + 25$$

$$n = n + 1$$

return n

1

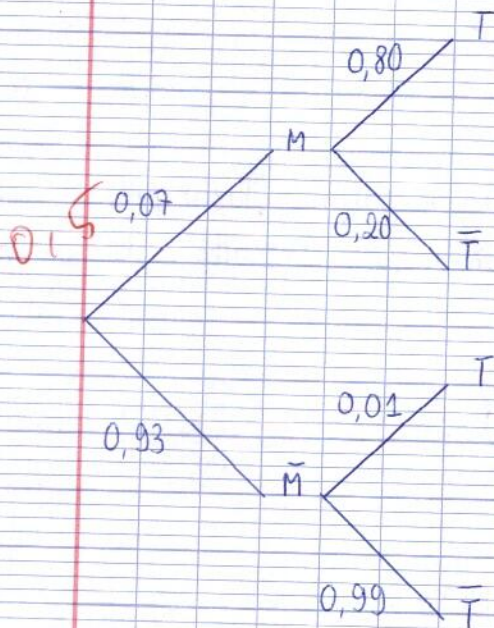
1660

Bac Blanc Maths

1660

$$\frac{8}{20}$$

1)

Calculons $P(M \cap T)$

d'après les probabilités composées.

$$\begin{aligned} P(M \cap T) &= P(M) \times P(T) \\ &= 0,07 \times 0,8 \\ &= \underline{\underline{0,056}} \end{aligned}$$

2) Calculons $P(T)$ d'après la ~~loi~~ des probabilités composées totale.

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) \\ &= 0,056 + P(\bar{M}) \times P(T) \\ &= 0,056 + (0,93 \times 0,01) \\ &= \underline{\underline{0,0653}} \end{aligned}$$

smiles

3) Dans les dépistages de Maladie il est préférable de connaître ~~$P_M(T)$~~ afin de mettre un nom sur la Maladie et pour la prescription de médicaments.

4) Calculons $P_T(M)$

d'après les probabilités conditionnelles.

$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} \quad \text{avec } P(T) \neq 0.$$

A

alors : $\frac{0,056}{0,0653} \approx \underline{\underline{0,86}}$

5) justifions par récurrence qu'il s'agit d'une loi Binomiale.

* épreuve de Bernoulli.

- prendre un individu et regarder s'il a un test positif.
- succès "l'individu a un test positif".
- alors $p = 0,0653$.

* Schéma de Bernoulli.

l'épreuve est répétée $n = 10$ de façon identiques et indépendantes.
donc l'expérience est un schéma de Bernoulli de paramètre p .
 $p = 0,0653$ et $n = 10$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(10; 0,0653).$$

b) Calculons! Déterminons $P(X=2)$.
d'après ~~la~~ formule.

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \quad \text{car } \dots$$

alors d'après la calculatrice.

$$P(X=2) \approx 0,11$$

6) <

0,5

160

exercice 2:

1) le Modèle avec une raison et les suites paraît plus adaptée.

3) Notons $P(n)$: " $T_n \leq 25$ ".

démontrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* Initialisation: on sait que $T_0 = -19$.

alors $\text{i.e. } T_0 \leq 25$
 $-19 \leq 25$

donc $P(0)$ est vraie.

* hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $P(n)$ est vraie; démontrons son hérédité au rang suiv-

-ant $P(n+1)$. Sachant $T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$.

alors: à démontrer: $T_{n+1} \leq 25$.

$$0,94 T_n \leq 25 \times 0,94$$

$$0,94 T_n + 1,5 \leq 25 \times 0,94 + 1,5$$

$$\text{enfin } 0,94 T_n + 1,5 = T_{n+1}$$

$$\text{alors } T_{n+1} \leq 25$$

On a donc démontré que $P(0)$ est vrai et héréditaire à partir de ce rang.
 $T_n \leq 25$ et $T_{n+1} \leq 25$.

Le résultat est en effet prévisible car les gateaux étant sortis du congélateur à -19° et subir une décongélation constante à une température de 25° atteint qu'au bout de 10 minutes une température de $4,3^\circ\text{C}$.

2) Calculons T_1

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= 0,94 T_n + 1,5 \\ T_{0+1} &= 0,94 \times T_0 + 1,5 \\ T_{0+1} &= 0,94 \times (-19) + 1,5 \\ &= \underline{\underline{-16,4}} \end{aligned}$$

Calculons T_2

$$\begin{aligned} T_{1+1} &= 0,94 \times T_1 + 1,5 \\ &= 0,94 \times (-16,4) + 1,5 \\ &= \underline{\underline{-13,9}} \end{aligned}$$

7)c)

def seuil

$$m = 0$$

$$T = -19$$

while $T \geq 10$

$T =$

$$m = m + 1$$

return m.

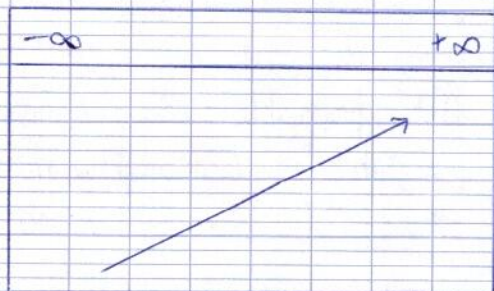
4) ~~Calcul~~ du sens de Variation.

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= -0,06 \times (T_n - 25) \\ &= -0,06 T_n - 1,5 \end{aligned}$$

soit d'après l'énoncé $T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$.

or $T_n \leq 25$ ~~$0,94 > 0$~~ et $1,5 > 0$.
donc.
la suite semble être croissante.

5)



Une suite croissante et majorée converge.

1660

6) a) Démontrons que (u_n) est une suite géométrique.

$$u_{n+1} = T_{n+1} - 25$$

$$= 0,94 T_n + 1,5 - 25$$

$$= 0,94 T_n - 23,5$$

7) b) D'après l'énoncé :

T_n est la température des gâteaux en $^{\circ}\text{C}$.

alors :

$$T_m = -44 \times 0,94^m + 25$$

$$\cancel{T_{40}} = -44 \times 0,94^{40} + 25$$

7) a) Sachant $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$

$$T_n = -44 \times 0,94^{30} + 25$$

$$T_n = 18^{\circ}\text{C}$$

la Température atteinte est de 18°C .

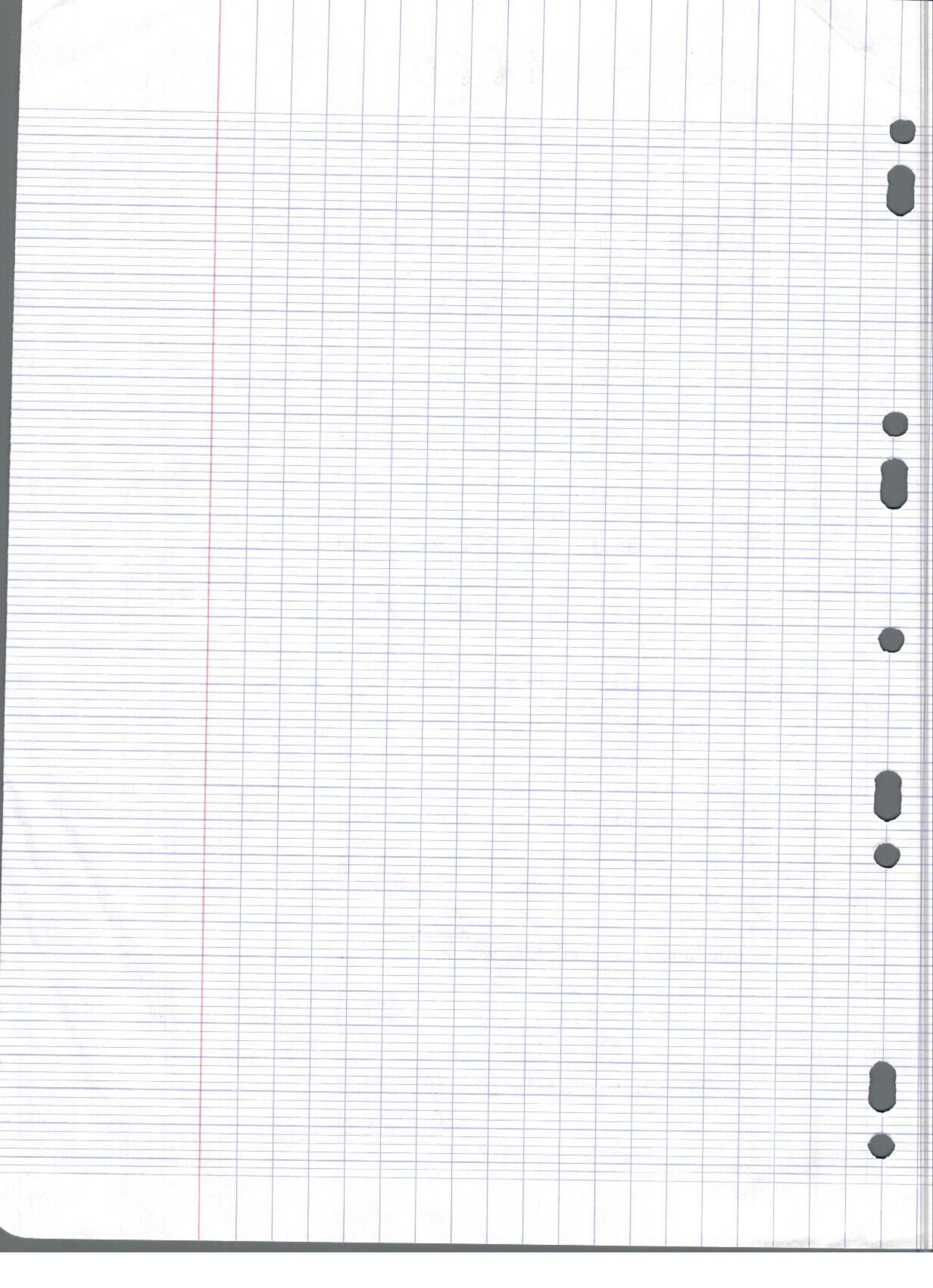
1) Sachant $T_{m+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$

$$= -0,06 T_n + 1,5$$

afin de mettre au rang $m+1$ on fait : $= (1 - 0,06 T_n) + 1,5$

$$= \underline{\underline{0,94 T_n + 1,5}}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$.



Jeudi 29 septembre 2022

Bac Blanc de Mathématiques

1680

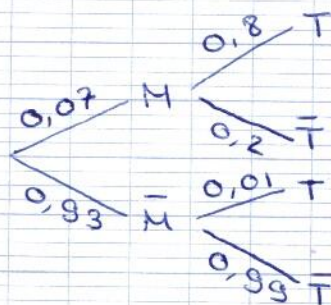
Note: observations

$\frac{19}{20}$

Exercice 1

1-

0,5



#1. Calculons $P(M \cap T)$

$P(M) > 0$, donc d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(M \cap T) &= P(M) \times P_M(T) \\ &= 0,07 \times 0,8 \\ &= 0,056 \end{aligned}$$

2- Calculons $P(T)$

$\{M; \bar{M}\}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$$

$P(M) > 0$ et $P(\bar{M}) > 0$, donc d'après la formule des probabilités composées :

$$P(T) = P(M) \times P_M(T) + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T)$$

$$\cancel{P(T)} = \cancel{0,056} \times$$

$$P(T) = 0,056 + 0,93 \times 0,01$$

$$= 0,056 + 0,0093$$

$$= 0,0653$$

3- Il est plus pertinent, dans le cadre d'un dépistage de la maladie:

$P_T(M)$ c'est un peu court
jeune fille...

4- Calculons $P_T(M)$

$P(T) > 0$, donc d'après la définition des probabilités conditionnelles:

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$$

$$= \frac{0,056}{0,0653}$$

$$\approx 0,86$$

5-a) Justifions qu'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli

- * Choisir une personne au hasard dans la population et chercher à savoir si cette personne a eu un test positif ou pas est une épreuve de Bernoulli
- * Succès: "L'individu a un test positif"
- * $p = \cancel{0,86} 0,0653$

L'épreuve de Bernoulli est répétée $n=10$
Bois de Bagon identiques et indépendantes

4 Cette expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n=10$ et $p=0,0653$ ✓

1680

1,5

La variable aléatoire X donne le nombre d'individus ayant un test positif, soit le nombre de succès, donc $X \sim B(10; 0,0653)$ ✓

b)

$X \sim B(10; 0,0653)$, donc :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

1,5

$$P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1-0,0653)^{10-2} \\ \approx 0,11$$

0,5

6- Nous cherchons à déterminer le nombre de personnes à interroger, soit n , pour que :

$$P(X \leq 1) > 0,99$$

D'après le tableau de valeurs de la calculatrice, cette condition est vérifiée pour $n=2$, soit 2 personnes interrogées

Exercice 2

1^{er} modèle

En 10 minutes, le gâteau est passé d'une température de -19°C à $-1,3^{\circ}\text{C}$, soit un réchauffement de $20,3^{\circ}\text{C}$. Comme la vitesse de décongélation est constante, la situation peut être représentée sous la forme d'un tableau de proportionnalité.

variation du

variation du

temps (en minutes)	10	25
réchauffe- ment en (°C)	20,3	50,75

$$50,75 - 19 = 31,75$$

la température théorique

atteinte par le gâteau est de 31,75.

Ce n'est pas réaliste car la température ambiante de la pièce est de 25°C, donc la température du gâteau ne devrait pas la dépasser.

2^e modèle

1-

$$T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$$

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= -0,06 \times (T_n - 25) + T_n \\ &= -0,06 T_n + 1,5 + T_n \\ &= 0,94 T_n + 1,5 \end{aligned}$$

2-

$$T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5, \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= 0,94 \times T_0 + 1,5 \\ &= 0,94 \times (-19) + 1,5 \\ &= -16,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 &= 0,94 \times T_1 + 1,5 \\ &= 0,94 \times (-16,4) + 1,5 \\ &= -13,9 \end{aligned}$$

3-

Notons $P(n)$: " $T_n \leq 25$ "

Démontrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

* ~~D'une part~~

On a $T_0 = -19 \leq 25$, donc $P(0)$ est vraie

* Soit $n \in \mathbb{N}$

TA

Supposons que $P(n)$ est vraie, démontrons que $P(n+1)$ l'est aussi.

D'après l'hypothèse de récurrence, on a:

$$T_n \leq 25$$

$$0,94T_n \leq 0,94 \times 25, \text{ car } 0,94 > 0$$

$$0,94T_n + 1,5 \leq 23,5 + 1,5$$

$$T_{n+1} \leq 25, \text{ donc } P(n+1) \text{ est vraie}$$

Ainsi, nous avons démontré par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leq 25$

4- Étudions la monotonie de (T_n)

$$T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$$

$-0,06 < 0$ et pour $T_n \leq 25$, $T_n - 25 \leq 0$
donc par produit,

$$T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25) \geq 0, \text{ donc}$$

la suite (T_n) est croissante.

5- À l'aide la calculatrice, nous pouvons conjecturer que (T_n) converge vers 25.

$$6- u_n = T_n - 25$$

$$u_{n+1} = T_{n+1} - 25$$

$$= 0,94T_n + 1,5 - 25, \text{ or } u_n = T_n - 25,$$

$$= 0,94T_n - 23,5$$

$$= 0,94(u_n + 25) - 23,5$$

$$\text{donc } T_n = u_n + 25$$

0,25 b) (u_n) est géométrique de raison $q = 0,94$ et de terme initial $u_0 = -44$, donc :

$$u_n = -44 \times 0,94^n$$

Or, $u_n = T_n - 25$

$$\Leftrightarrow T_n = u_n + 25$$

1 $\Leftrightarrow T_n = -44 \times 0,94^n + 25$

c) $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = 0$, car $0,94^n$ est sous la forme q^n et que $q = 0,94$
 $0 < q = 0,94 < 1$

par produit,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} -44 \times 0,94^n = 0$, donc par addition,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 25$$

1/ Cela signifie que la température du gâteau ne dépassera pas 25 °C peu importe le temps durant lequel il est laissé en dehors du congélateur

7-a) Calculons T_{30}

0,5 $T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25$

$\approx -18^\circ\text{C}$

TA

b) D'après le tableau de valeurs, Cécile devrait déguster son gâteau après un temps en minute t , tel que :

1680 0,5

$$17 < t < 18$$

c)

def seuil(n):

n = 0

T = -19

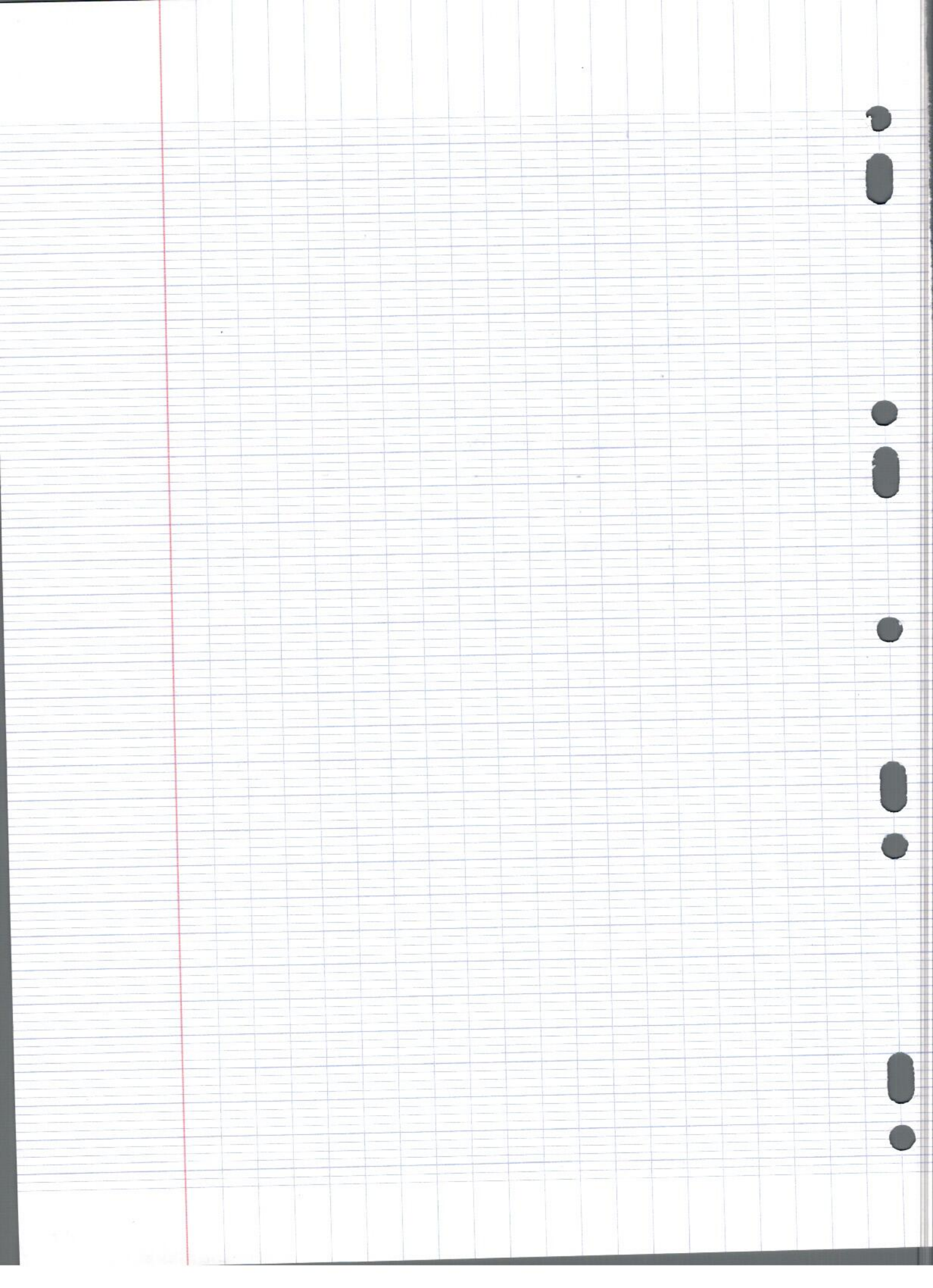
0,75

while T ~~≤ 10~~ < 11 :

T = ~~11~~ × 0,94 * T + 1,5

n = n + 1

return n

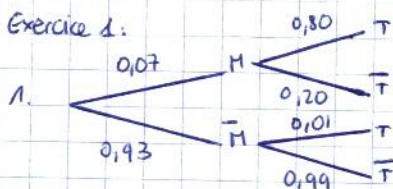


1720

Écrivez plus gros ou je pénaliserais

$$\frac{14,25}{20}$$

Exercice 1.

Calculons $P(M|NT)$

$$P(M|NT) = \frac{P(M \cap NT)}{P(NT)}$$

$$= \frac{0,07 \times 0,80}{0,056}$$

$$P(M|NT) = 0,98$$

3. Dans un contexte de dépistage de la maladie il est plus pertinent de connaître $P_H(T)$ car il traduit la probabilité que le test soit positif sachant que la personne est malade.

4. Calculons $P_T(M)$

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,056}{0,0653}$$

$$P_T(M) = 0,86 \text{ arrondi à } 10^{-2} \text{ près}$$

5. a) Soit X qui suit une loi binomiale de paramètre n et p .

* Epreuve de Bernoulli

- il y a 2 issues possibles
- le succès est : "le nombre d'individu a un test positif"
- le paramètre $p = 0,0653$

* Schéma de Bernoulli

- l'épreuve est répétée $n = 10$ fois à l'identique et de façon indépendante
- X compte le nombre de succès, c'est à dire que X est la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.

$$\text{Donc } X \sim B(10; 0,0653)$$

5. b) calculons $P(X=2)$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ donc}$$

$$P(X=2) = \binom{10}{2} 0,0653^2 (1-0,0653)^{10-2}$$

d'après la calculatrice :

$$P(X=2) = 0,11 \text{ arrondi à } 10^{-2} \text{ près}$$

La probabilité pour qu'exactly deux personnes aient un test positif est de 0,11 à 10^{-2} près.

b.

Exercice 2:

I - Premier modèle

À la sortie du congélateur, les gâteaux ont une température égale à -19°C

Au bout de 10 minutes, la température est égale à $1,3^{\circ}\text{C}$ soit a augmenté de $20,3^{\circ}\text{C}$

Donc, d'après ce modèle :

$$U_n = -19 + 20,3n$$

Plus simplement, Si au bout de 10 minutes, la température a augmenté de $20,3^{\circ}\text{C}$, la température augmente de $2,03^{\circ}\text{C}$ chaque minute. Donc, au bout de 25 minutes :

$$U_{25} = -19 + 2,03 \times 25 \\ = 33,75$$

la température des gâteaux est de $33,75^{\circ}\text{C}$ au bout de 25 minutes après leur sortie du congélateur

→ Ce modèle ne semble pas très pertinent car les gâteaux ont une trop haute température par rapport à celle de la terrasse.

II - second modèle

1. Soit $T_{n+1} = -0,06 \cdot (T_n - 25) - T_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$
soit $n \in \mathbb{N}$.

$$T_{n+1} - T_n = -0,06 \cdot (T_n - 25) - T_n$$

$$T_{n+1} - T_n = -0,06T_n + 1,5$$

$$T_{n+1} = -0,06T_n + 1,5 + T_n$$

$$T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$$

Nous avons démontré que $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$

2. Calculons T_1 et T_2

Nous savons que $T_0 = -19$ et que, d'après la question précédente :

$$T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5 \quad \text{donc}$$

$$T_{0+1} = 0,94T_0 + 1,5$$

$$= 0,94 \times (-19) + 1,5$$

$$T_{0+1} = -16,4 \text{ arrondi à } 10^{-1} \text{ près}$$

$$T_{1+1} = 0,94T_1 + 1,5$$

$$= 0,94 \cdot (-16,4) + 1,5$$

$$T_{1+1} = -13,9 \text{ arrondi à } 10^{-1} \text{ près}$$

3. Notons $P(n)$: " $T_n \leq 25$ "

1720

Démontrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

* Initialisation

$T_0 = -19 \leq 25$ donc $P(0)$ est vraie

* Hérité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons $P(n)$ vraie et démontrons que $P(n+1)$ est vraie

D'après l'hypothèse de la récurrence :

$$T_n \leq 25$$

$$0,94 T_n \leq 0,94 \cdot 25$$

$$0,94 T_n + 1,5 \leq 0,94 \cdot 25 + 1,5$$

Or $0,94 T_n + 1,5 \leq 0,94 \cdot 25 + 1,5 \leq 25$
donc $T_{n+1} \leq 25$ par conséquent $P(n+1)$ est vraie

Nous avons démontré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \leq 25$

→ Ce résultat était prévisible car on nous informait que la température ambiante était de 25°C et que la température augmentait de $0,94^\circ\text{C} < 1$ donc ne pourrait pas dépasser les 25°C

4. Étudions le sens de variations de la suite (T_n)
cherchons (T_n)

$$T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$$

$$T_{n+1} - 1,5 = 0,94 T_n \text{ donc}$$

$$T_n = \frac{T_{n+1} - 1,5}{0,94}$$

T_n est sous la forme $\frac{u}{v}$ avec

$$u = T_{n+1} - 1,5 = 0,94 T_n + 1,5 - 1,5; u' = 0,94$$

$$v = 0,94$$

$$\frac{u}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{0,94^2 - 0,94 T_n \times 0}{(0,94)^2} = \frac{(0,94)^2}{(0,94)^2} > 0$$

$T_n > 0$ alors la suite est strictement croissante

5. D'après la calculatrice la suite semble converger vers 0

6.a) Notons : " $U_n = T_n - 25$ " $\forall n \in \mathbb{N}$

Démontrons que (U_n) est géométrique

On a : $U_n = T_n - 25$ donc

$$U_{n+1} = T_{n+1} - 25$$

$$= (0,94 T_n + 1,5) - 25$$

$$U_{n+1} = (*)$$

U_n est donc une suite géométrique de raison $q = 0,94$ et de premier terme $U_0 = T_0 - 25$

$$T_0 = -19 \times 0,94^0 + 25$$

$$= -19$$

$$U_0 = T_0 - 25$$

$$= -19 - 25 = -44$$

$$(*) \quad U_{n+1} = (0,94 \cdot (U_n + 25) + 1,5) - 25 \\ = 0,94 U_n + 23,5 + 1,5 - 25 \\ = 0,94 U_n$$

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= -0,06 \times (T_n - 25) \\ -T_n &= -0,06 \times (T_n - 25) - T_{n+1} \\ -T_n &= -0,06 T_n + 1,5 - (0,94 T_n + 1,5) \\ -T_n &= -0,94 T_n \text{ donc} \\ T_n &= 0,94 T_n \end{aligned}$$

6.b) On étant une suite géométrique, nous avons :

$$U_n = T_0 \times q^n$$

c) $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$
cherchons la limite de T_n

$(0,94^n)$ nous montre qu'il s'agit d'une g suite géométrique

$0 < 0,94 < 1$ donc d'après le théorème des gendarmes, $0,94$ converge vers 0

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -44 \rightarrow -44$$

par multiplication : $\lim_{n \rightarrow +\infty} -44 \times 0,94^n \rightarrow 0$

par sommation :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -44 \times 0,94^n + 25 \rightarrow 25$$

Le résultat nous montre donc que la suite converge vers 25, soit la température rest majorée par 25

7.a) $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$

$$T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25$$

D'après la calculatrice $T_{30} = 18$ arrondie à l'entier le plus proche

b) D'après la calculatrice :

$17 < 10 < 19$ → réile devrait goûter déguster son gâteau entre 17 et 19 minutes pour avoir une température de 10°C environ soit 18 minutes après la sortie du congélateur

c)

29/09/2022

Bac blanc de Mathématiques

T.A

n° 1780

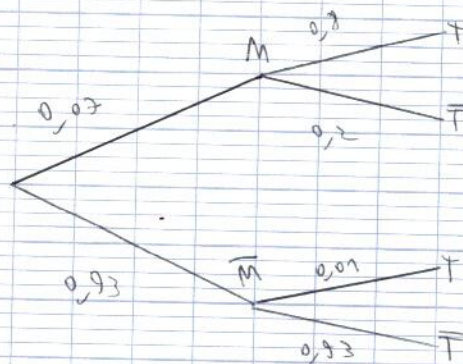
Écrivez plus gros.

$$\frac{19,5}{20}$$

Exercice 1:

1.

0,5

On calcule $P(M \cap T)$:Étant donné que $P(M) > 0$, d'après la formule des probabilités composées:

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_{M|T}$$

$$P(M \cap T) = 0,07 \times 0,8$$

$$P(M \cap T) = 0,056$$

On calcule $P(T)$:2. M et $\bar{M}$ représentent un univers complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales:

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$$

$$P(T) = P(M) \times P_{M|T} + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}|T}$$

$$P(T) = 0,07 \times 0,8 + 0,93 \times 0,01$$

$$P(T) = 0,056 + 0,0093$$

$$P(T) = 0,0653$$

3. Dans un centre de dépistage de la maladie, il est plus probable de connaître $P_+(M)$ car l'objectif du test est de détecter si une personne a la maladie. La santé est incertaine et malade.

On cherche $P_+(M)$

4. Étant donné que $P(T) > 0$, l'équation des probabilités composées :

$$P_+(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,056}{0,0653} \approx 0,86 \text{ en milliards } \approx 10^{-2} \text{ prob.}$$

5. (i) Justifions qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli :

(i) Épreuve de Bernoulli :

"On teste une personne ou choisit dans la population de personnes."

Succès : "le test est positif"

$$p = 0,0653$$

(ii) Schéma de Bernoulli :

On répète cette épreuve $n=10$ fois de façon indépendante et identique.

Cette expérience est ainsi un schéma de Bernoulli à paramètres :

$$n=10 \text{ et } p=0,0653$$

→ Ce n'est pas nous qui créons cette variable.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès de cette expérience de Bernoulli, alors X suit la loi binomiale suivante :

$$X \hookrightarrow B(10; 0,0653)$$

(a) On calcule $P(X=2)$.

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1-0,0653)^{10-2}$$

$$P(X=2) = \frac{10!}{2!(10-2)!} \times 0,0653^2 \times 0,9347^8$$

D'après la calculatrice : $P(X=2) \approx 0,11$ en arrondissant à 10^{-2} près

b En inversant dans la formule la loi binomiale $Y = 1 - \text{binom.fdp}(X; 0,0653, 0)$ on cherche à partir de quel $X \in \mathbb{N}$ $Y > 0,91$, on trouve $X=69$.
On vérifie si la calculatrice : $X \hookrightarrow B(69; 0,0653)$:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$$

$$P(X \geq 1) = 1 - \binom{69}{0} \times 0,0653^0 \times 0,9347^{69}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - 0,9347^{69}$$

$P(X \geq 1) \approx 0,91$ en arrondissant à 10^{-2} près pour $n=69$

Il faut ainsi tester au minimum 69 personnes pour que la probabilité qu'un ratio l'un d'eux ait un test positif soit supérieure à 91%.

~~Feet 2.~~

~~18~~

Exercice 2:

PA

n° 1780

I - Première mobile :

Soit la suite arithmétique T_n ^{réelle} ~~réelle~~ représentant la température des gâteaux en degrés Celsius à l'instant n de minutes.
 Soit $n \in \mathbb{N}$: $T_n = T_0 + nq$
 $T_0 = -19$
 $T_n = T_0 + \frac{2,03}{1} \times n = T_0 + 2,03n$ illisible

Calculer la température des gâteaux au bout de 25 minutes :

$$T_{20} = T_0 + 2,03 \times 20$$

$$T_{20} = -19 + 40,6$$

$$T_{20} = 21,6$$

Cette mobile ne rend pas précis car la température des gâteaux groupe ^{indéfini} ~~indéfini~~ ^{est} ~~est~~ ^{constante} ~~constante~~ ^{à 25°C} ~~à 25°C~~, donc ^{à 25°C} ~~à 25°C~~ la loi de la thermodynamique.

II - Second mobile :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Après l'instant :

$$T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$$

$$T_{n+1} = -0,06 T_n - 25 \times (-0,06) + T_n$$

$$T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$$

W/S

2.

$$T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$$

$$T_1 = 0,94 \times (-10) + 1,5$$

$$T_1 = -10,36 \approx -10,4 \text{ arrondi au dixième}$$

$$T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$$

$$T_2 = 0,94 \times (-10,36) + 1,5$$

$$T_2 = -11,8794 \approx -11,9 \text{ arrondi au dixième}$$

3. On peut PC(n): " $T_n \leq 25$ " pour tout $n \in \mathbb{N}$ i.e. l'induction (Tn) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ PC(n):

* Initialisation:

Pour $n=0$:

$$T_0 = -10 \leq 25$$

Donc $P(0)$ est vraie

* Hérité:

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $P(n)$ vraie, démontrons que $P(n+1)$ l'est aussi.

D'après l'hypothèse de récurrence: $T_n \leq 25$

$$0,94T_n \leq 23,5$$

$$\text{car } 0,94 \geq 0$$

$$0,94T_n + 1,5 \leq 25$$

$$\text{D'après l'hérédité: } T_{n+1} \leq 25$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie

* Nous avons donné par hypothèse que :

$$T_n \in \mathbb{N}, T_n \leq 25$$

$T^0 A$
n° 7280

0,25

Ce résultat est prouvé car le température extérieure est gèle à $25^\circ C$, il serait alors égal à celle des gâteaux parvenus à la déperdition.

4. Calculer le jour de venison à la date (T) à l'issue

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= 0,94T_n + 1,5 - T_n \\ &= -0,06T_n + 1,5 \end{aligned}$$

Faites des phrases: utilisez le "="

Etat limite pour $T_n \leq 25$, $-0,06T_n \geq -1,5$ car $-0,06 \leq 0$ $5 - 1,5 + 1,5 = 0$
utilisable

0,75

i.e. $-0,06T_n + 1,5 \geq 0$

L. jour de T_n est donc comprise pour $n \in \mathbb{N}$ et comprise pour $T_n = 25$

0,5

5. D'après la calculatrice (ou la mesure des limites naturelles), on peut conjecturer que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 25.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$:

D'après l'hypothèse: $V_n = T_n - 25$

$$V_{n+1} = T_{n+1} - 25$$

D'après l'hypothèse: $V_{n+1} = 0,94T_n + 1,5 - 25$

6/8

$$U_{n+1} = 0,94 T_n + 25 \times 0,06 - 25$$

$$U_{n+1} = 0,94 T_n + 25(0,06 - 1)$$

$$U_{n+1} = 0,94 T_n + 25 \times (-0,94)$$

$$U_{n+1} = 0,94(T_n - 25) \quad \checkmark$$

1

(a) On obtient ainsi une suite géométrique de raison $q = 0,94$ de l. P.G. $U_n = U_0 \times q^n$ et le premier terme $U_0 = T_0 - 25 = -44$.

(b) ~~rien~~:

d'après l'énoncé: $U_n = T_n - 25$ ~~illisible~~.

$$-44 \times 0,94^n = T_n - 25$$

$$25 - 44 \times 0,94^n = T_n$$

2

$$T_n = -44 \times 0,94^n + 25$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = 0 \quad (0 < 0,94 < 1) \quad \checkmark$$

$$p- \text{ produit: } \lim_{n \rightarrow +\infty} -44 \times 0,94^n = 0 \quad \checkmark$$

$$p+ \text{ somme: } \lim_{n \rightarrow +\infty} -44 \times 0,94^n \times 25 = 25 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 25 \quad \checkmark$$

1

La limite de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est 25, ce qui correspond à la température ambiante ou la température de l'air.

on utilise T_{30} :

2. (c) Soit $n = 30$

$$T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25$$

0,5

$$T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25 \approx 18, \text{ ce qui correspond à la température la plus proche}$$

Les gâteaux sont à la température initiale 18°C après la mise au four.
la décongélation.

90°A
 $n = 1780$

(b) On nous donne $T_n = 10$:

$$T_0 = T_n$$

$$10 = -44 \times 0,94^n + 25$$

$$-15 = -44 \times 0,94^n$$

$$\frac{-15}{-44} = 0,94^n$$

$$\frac{15}{44} = 0,94^n$$

Après la calculatrice :

$$n \approx 12,392$$

Donc pour que $T_n \approx 10$,

$$17 \leq n \leq 18$$

0,15

78 minutes. Ce gâteau doit être décongelé en 78 minutes.

(c) def tout():

$$n = 0$$

$$T = -19$$

while $T < 10$:

$$T = 0,94 \times T + 1,5$$

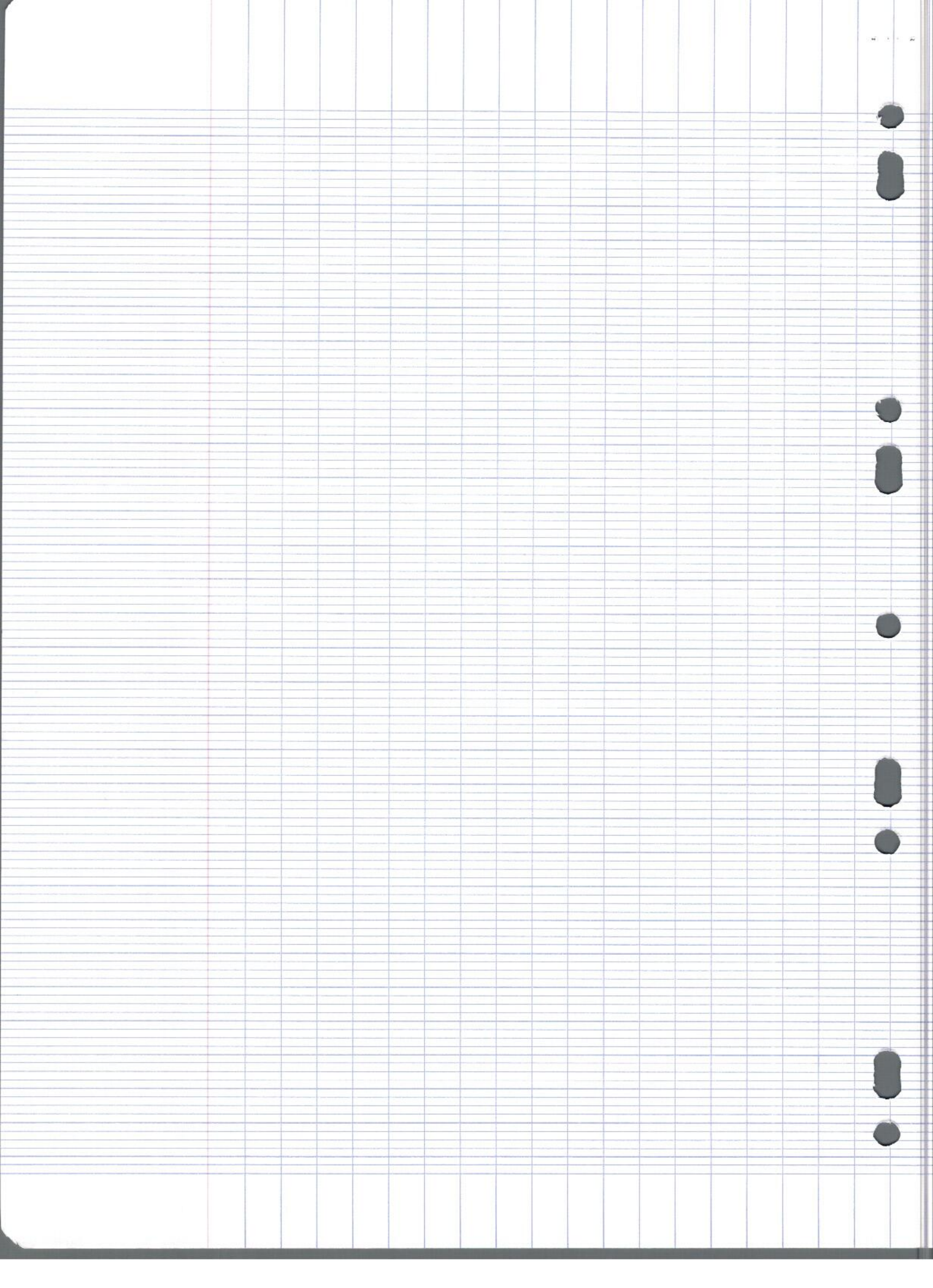
$$n = n + 1$$

$$\text{return } n$$

Le programme renvoie $n = 18$.

0,175

8/8

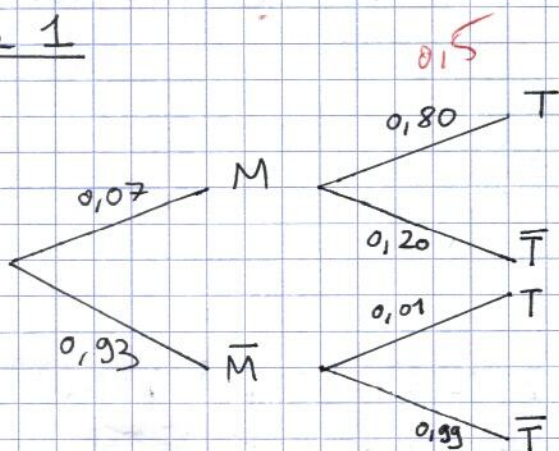


Bac Blanc n°1

$$\frac{13,25}{20}$$

Exercice 1

1.



$$\cancel{P(A \cap B)}$$

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T)$$

$$= 0,07 \times 0,8$$

$$= 0,056$$

$$0,75$$

2. D'après la formule des probabilités totale

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$$

$$= 0,056 + 0,0093$$

$$= 0,0653$$

$$0,75$$

3. Il est plus pertinent de connaître $P_T(M)$ dans le contexte de dépistage de la maladie car c'est un indicateur plus facile à utiliser pour savoir la fiabilité du test. En effet on dépiste avant le passien pour ensuite se rendre compte qu'il est malade.

✓

4. R D'après la formule des probabilités conditionnelles:

$$P_T(M) = \frac{P(TM)}{P(T)} = \frac{0.056}{0.0653} = 0.86$$

1

5a Démontrons que X suit une loi binomiale.

Epreuve de Bernoulli "tirer une personne au hasard"

Succès "individu ayant un test positif" $p = 0.0653$ (soit $P(T)$)

1,25 Schéma de Bernoulli "on répète l'expression 10 fois avec remise, à l'identique et de manière indépendante" $n=10$

X compte le nombre d'individus ayant un test positif par les 10 donc

$$X \sim B(10; 0.0653)$$

b- $X \sim B(10; 0.0653)$

0,75 D'après le cours, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$$P(X=2) = \binom{10}{2} (0.0653)^2 \cdot (1-0.0653)^{10-2}$$

6- $\sigma = \sqrt{V(X)} =$

Exercice 2

1870

I - Premier modèle

⊕ Selon le fait que la vitesse de décongélation est constante et qu'au bout de 10 minutes la température des gâteaux est de $1,3^\circ\text{C}$:
 $\Rightarrow$ gain de $20,3^\circ\text{C}$ en 10 min $\Rightarrow$ gain de $2,03^\circ$ en 1 minute

$$U_{m+1} = U_m + 2,03$$

Soit m compte le nombre de minutes
On note U_m la température des gâteaux $^\circ\text{C}$

$$U_m = -19 + m \times 2,03, \therefore \text{donc } U_{25} = -19 + 25 \times 2,03 = \underline{31,75^\circ\text{C}}$$

Le modèle n'est pas pertinent car de manière physique, un gâteau ne pourrait pas atteindre une température de $31,75^\circ\text{C}$ dans un endroit où la température est de 25°C

II - Second modèle

$$1 - T_{m+1} - T_m = -0,06 \times (T_m - 25) \Leftrightarrow T_{m+1} - T_m = -0,06 T_m + 1,5$$

donc $T_{m+1} = -0,06 T_m + 1,5$

2 - Calculons T_1 et T_2

$$T_1 = 0,94 \times T_0 + 1,5 = 0,94 \times -19 + 1,5 = -16,4$$

$$T_2 = 0,94 \times T_1 + 1,5 = 0,94 \times -16,36 + 1,5 = -13,9$$

3. Noton $\mathcal{P}(n)$: " $T_n \leq 25$ "

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$

* Initialisation

D'une part $T_0 = -19$

D'autre part $-19 \leq 25$

donc $u_0 \leq 25$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé

* Hérité

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Supposons que $P(n)$: " $T_n \leq 25$ " est vraie

Démontrons que $P(n+1)$ est vraie

(et donc que $P(n+1)$:
" $T_{n+1} \leq 25$ ")

D'après l'énoncé: $T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$

0,5

$$T_n = \frac{T_{n+1} + 1,5}{0,94}$$

D'après l'hypothèse de récurrence $T_n \leq 25$

$$\text{donc } \frac{T_{n+1} + 1,5}{0,94} \leq 25 \Leftrightarrow T_{n+1} + 1,5 \times \frac{100}{47} \leq 25$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} \leq \frac{25 - 1,5}{0,94} \approx 20$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} \leq 20,3404$$

Donc $P(n+1)$ est vraie

On a démontré par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}$,

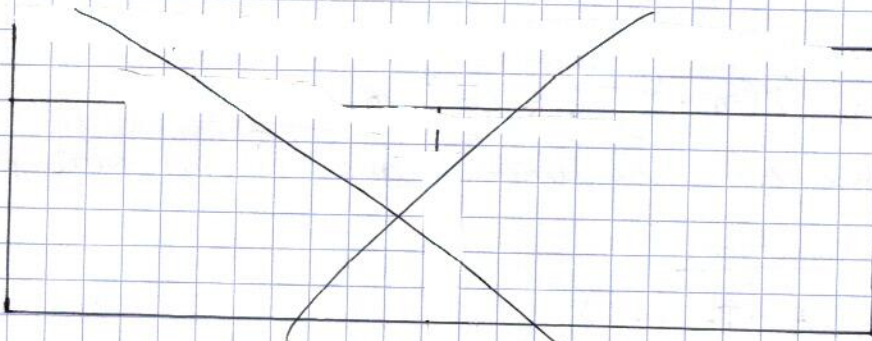
$$T_n \leq 25.$$

Qui ce résultat était prévisible car la température ambiante de la terrasse ne dépasse pas les 25°C

4-

$$T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} < T_n \text{ quand } T_n > 25$$



1

Or $T_n \leq 25$ donc la suite est croissante
(et monotone.)

5- On conjecture que la suite T_n converge vers $+\infty$

1820

6- a) $U_n = T_n - 25, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= T_{n+1} - 25 \\ &= 0,94 T_n + 1,5 \end{aligned}$$

$$U_n \neq 0 \text{ car } T_n \leq 23,404$$

Donc $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{T_{n+1} - 25}{T_n - 25} = \frac{0,94 T_n - 25}{T_n - 25} = 0,94$

Donc U_n est une suite géométrique de raison 0,94 et de premier terme $U_0 = -44$

b)

$$\begin{aligned} c) \quad T_n &= -44 \times 0,94^n + 25 \\ &= 0,94^n \left(\frac{-44}{0,94^n} + \frac{25}{0,94^n} \right) \end{aligned}$$

7 (a) $T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25 \approx 18$ ✓

b) D'après la calculatrice pour que le gâteau soit
à une température de 10, $17 < n < 18$

c) def seuf():

$m = 0$

$T = n$

while $T = ~~0,94^n~~ - 44 \times 0,94^m + 25$

$T = 10$

$m = m + 1$

return m

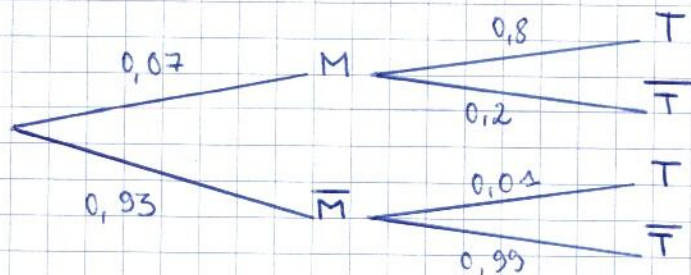
Jeudi 29 septembre 2022

1 900

Bac blanc n°1
Mathématiques

15
20

Exercice 1



1. Calculons $P(M \cap T)$

$P(M) \neq 0$, donc d'après la formule des probabilités composées

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T)$$

✓ $P(M \cap T) = 0,07 \times 0,8$

$P(M \cap T) = 0,056$

2. Calculons $P(T)$

$\{M; \bar{M}\}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales:

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$$

$P(M) \neq 0$ et $P(\bar{M}) \neq 0$, donc d'après la formule des probabilités composées

$$P(T) = P(M) \times P_M(T) + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T)$$

$$P(T) = 0,07 \times 0,8 + 0,93 \times 0,01$$

✓ $P(T) = 0,0653$

3. Dans un contexte de dépistage de maladie, il est plus pertinent de connaître $P_+(M)$. Cela correspond au véritable nombre de malade parmi ceux qui ont un test positif.

4. Calculons $P_+(M)$

$P(T) \neq 0$, donc d'après la formule des probabilités conditionnelles.

$$P(T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$$

d'après les réponses aux questions précédentes

$$P(T) = \frac{0,056}{0,0653}$$

1 $P(T) \approx 0,86$

5.a) Epreuve de Bernoulli: choisir une personne

Succès: "avoir un test positif" / $p = 0,0653$

Schéma de Bernoulli: L'expérience est répétée $n = 10$ fois de façon identique et indépendante.

1,0

$$X \hookrightarrow B(10; 0,0653)$$

b) Calculons $P(X=2)$

$X \hookrightarrow B(10; 0,0653)$ donc

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1-0,0653)^{10-2}$$

$$P(X=2) = \frac{10!}{2! (10-2)!} \times 0,0653^2 \times (1-0,0653)^{10-2}$$

1,5

$$P(X=2) \approx 0,11$$

Exercice 2

I - Premier modèle

Temps (min)	0	10
Température (°C)	-19	1,3

1900

0/25 Puisqu'au bout de 10 min la température augmente de $20,3^\circ\text{C}$, si l'augmentation de la température est la même minute après minute, alors au bout de 25 min, la température aura augmenté de $50,75^\circ\text{C}$ ^{car?}, la température du gâteau sera donc de $31,75^\circ\text{C}$.

Δ Ce modèle n'est pas pertinent, les gâteaux ne peuvent pas se réchauffer autant sachant la température extérieure à 25°C .

II - Second modèle

1. On a : ^{pour $m \in \mathbb{N}$} $T_{m+1} - T_m = -0,06 \times (T_m - 25)$, ~~$\forall m \in \mathbb{N}$~~

$$\Leftrightarrow T_{m+1} - T_m = -0,06 T_m + 1,5$$

$$\Leftrightarrow T_{m+1} = -0,06 T_m + T_m + 1,5$$

$$\Leftrightarrow T_{m+1} = 0,94 T_m + 1,5, \quad \text{ ~~$\forall m \in \mathbb{N}$~~ }$$

Pourtant on
n'a pas
dans les
équivalences.

2. Calculons T_1

$$T_1 = 0,94 T_0 + 1,5$$

$$T_1 = 0,94 \times (-19) + 1,5$$

$$T_1 \approx -16,4$$

Calculons T_2

$$T_2 = 0,94 T_1 + 1,5$$

$$T_2 = 0,94 \times (-16,36) + 1,5$$

$$T_2 \approx -13,9$$

3. Notons, pour tout entier naturel n , $P(n)$: " $T_n \leq 25$ ".

Démontrons par récurrence $P(n)$

* Initialisation

D'après l'énoncé $T_0 = -19$

Ainsi $T_0 \leq 25$

0,5 $P(0)$ est vraie

* Hérité

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons $P(n)$ vraie et démontrons que $P(n+1)$ l'est aussi

D'après l'hypothèse de récurrence

$$T_n \leq 25$$

$$0,94T_n \leq 0,94 \times 25 \text{ car } 0,94 > 0$$

$$0,94T_n \leq 23,5$$

$$0,94T_n + 1,5 \leq 23,5 + 1,5$$

$$T_{n+1} \leq 25$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie

* On a démontré par récurrence que :

0,75

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n \leq 25$$

4. Étudions le sens de variation de la suite (T_n)

$T_n \mapsto T_{n+1}$ correspond à la fonction $f(x) = 0,94x + 1,5$

f est affine avec $a = 0,94$ et $b = 1,5$

0,25 Puisque $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La suite (T_n) est donc strictement croissante.

5. Conjecturons

1900

À l'aide de la calculatrice, on conjecture

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 25$$

6. (a). Calculons l existe-t-elle?

$$T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$$

$$\text{Alors } l = 0,94 l + 1,5$$

$$l - 1,5 = 0,94 l$$

$$-1,5 = -0,06 l$$

$$l = \frac{-1,5}{-0,06}$$

$$\underline{l = 25}$$

La température des gâteaux se rapproche de la température extérieure, sans la dépasser.

7. (a) Calculons T_{30}

Selon la formule explicite

$$T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25$$

$$\underline{T_{30} \simeq 18}$$

La température est d'environ 18°C .

7. (b).

Conjecture

Les gâteaux atteignent les 10°C entre 17 et 18 minutes après la sortie du congélateur. car...

7.(c)

def seuil():

n = 0

T = -19 ✓

while T ~~≤~~ 10:

T = 0.94 * T + 1.5 ✓

n = n + 1

return n

6. (a) Conjecture

La suite (u_n) est géométrique de terme initial ~~$u_0 = -44$~~

et de raison $q = \frac{50}{47}$ ✓

Démonstration

$$U_n = T_n - 25$$

$$U_{n+1} = T_{n+1} - 25$$

$$U_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5 - 25$$

$$U_{n+1} = 0,94 T_n - 23,5$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{u_n?}$

1940

Boe Blome :Mathématiques (Page 1)

$$\frac{17,25}{20}$$

Exercice 1:

1. $P(T) > 0$. D'après la formule des probabilités composées :

$$P(M \cap T) = P(M) \times P(T)$$

$$= 0,07 \times 0,8$$

$$= 0,056 /$$

(les 2 événements M et T sont indépendants)



Non : ce n'est même pas sérieusement envisageable.

0,5

2. Calculons $P(T)$:

$\{M, T\}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$$

$$= 0,056 + P(\bar{M}) \times P(T)$$

les 2 événements $\bar{M}$ et T sont indépendants)

$$0,75 \quad P(T) = 0,056 + 0,93 \times 0,01$$

$$= 0,0653 /$$

3. Dans un contexte de dépistage de la maladie il est plus pertinent de connaître $P_T(M)$.

4. Calculons $P_T(M)$:

$P(T) > 0$. D'après la définition des probabilités conditionnelles:

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$$

$$= \frac{0,056}{0,0653}$$

$$\approx 0,86 /$$

5. a) Justifions la loi suivie par X :

Choisir au hasard une personne dans une population et regarder si elle a un test positif est une épreuve de Bernoulli.

Succès: "L'individu a un test positif"

$$p = 0,0653 \quad (\text{d'après la question 2.})$$

Bac Blanc :

Mathématiques (Page 2)

1940

5. a) (suite)

L'épreuve est répétée 10 fois de manière indépendante.

Alors l'expérience est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = 0,0653$.

On X compte le nombre d'individus ayant un test positif, c'est-à-dire le nombre de succès. Alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,0653$. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10; 0,0653)$

$$\begin{aligned} b) P(X = k) &= \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

$$P(X = 2) = \frac{10!}{(10-2)! \times 2!} \times 0,0653^2 \times (1-0,0653)^{10-2}$$

$$\approx 0,11$$

6. D'après la calculatrice il faut tester au moins 3 personnes pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elle ait un test positif, soit supérieure à 99 %. $[P(X \geq 3) > 0,99]$

1940

Bac Blanc :

Mathématiques (Page 3)

Exercice 2 :

I \ Premier modèle.

Calculons l'augmentation de température après 10 min :

$$1,3 - (-19) = 20,3$$

Calculons l'augmentation de température après 25 min :

$$\frac{20,3 \times 25}{10} = \underline{50,75}$$

Le modèle n'est pas pertinent car la température ambiante est largement en dessous de celle du gâteau ($25^{\circ}\text{C} < 50,75^{\circ}\text{C}$) ce qui n'est pas possible.

II \ Second modèle

$$1. \quad T_{n+1} - T_n = -0,06 T_n + 1,5$$

$$T_{n+1} = -0,06 T_n + T_n + 1,5$$

$$1. T_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5$$

2.

$$T_1 = 0,94 T_0 + 1,5 \simeq \underline{-16,364} \quad (T_0 = -19)$$

$$T_2 = 0,94 T_1 + 1,5$$

$$\simeq \underline{-13,9}$$

3. Démontrons par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $T_n \leq 25$.

Notons $P(n) : T_n \leq 25$

* $T_0 = -19$ et $-19 \leq 25$ alors $T_0 \leq 25$. Donc $P(0)$ est vraie.

supposons

* Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrons que $P(n)$ est vrai et démontrons que $P(n+1)$ est vrai.

D'après l'hypothèse de récurrence : $T_n \leq 25$

$$0,94 T_n \leq 23,5$$

(on multiplie par un nombre positif donc l'inégalité reste inchangée)

$$0,94 T_n + 1,5 \leq 25$$

1940

Bac Blanc:

Mathématiques (Page 4)

Pas de trucs
comme ça.

3. (suite)

D'après la définition de (T_n) :

$$(T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5)$$

$$T_{n+1} \leq 2,5$$

$\{ P(n+1) \text{ est vrai, donc } P(n) \text{ est vrai, soit } T_n \leq 2,5. \text{ Conclusion à reverser.} \}$

pour tout $n \in \mathbb{N}$

Le résultat était prévisible car la température ne peut pas dépasser la température ambiante. ✓

(4)

$$T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$$

4. Comme dit précédemment
On a $0,94T_n + 1,5 > T_n$ $T_n \leq 2,5$.

$$T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 2,5)$$

$$-0,06 < 0 \quad \text{et} \quad T_n \leq 2,5 \quad \text{alors} \quad T_n - 2,5 \leq 0$$

Le produit de ces 2 nombres négatifs est positif.

positif pas strictement positif.

Alors $T_{n+1} - T_n \geq 0 \Rightarrow T_{n+1} \geq T_n$

La suite (T_n) est donc ~~strictement~~ croissante.

5. D'après la calculatrice on peut conjecturer que la suite (T_n) converge vers 25.

6. a) $U_{n+1} = T_{n+1} - 25$

$U_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5 - 25$ car (~~Or~~ $T_n = U_n + 25$)

$U_{n+1} = 0,94 (U_n + 25) + 1,5 - 25$

$U_{n+1} = 0,94 U_n + 23,5 + 1,5 - 25$

$U_{n+1} = 0,94 U_n$

La suite (U_n) est donc géométrique de raison 0,94.

$U_0 = T_0 - 25 = -44$

b) Comme la suite (U_n) est géométrique :

$U_n = U_0 \times 0,94^n$
 $= -44 \times 0,94^n$

~~Or~~ $T_n = U_n + 25$

donc :

$T_n = -44 \times 0,94^n + 25$

1940

Bac Blanc:

Mathématiques (Page 5)

6. (suite)

c) $1 > 0,94 > 0$ ✓

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = 0 \quad \checkmark$$

Par ~~raison~~ produit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -44 \times 0,94^n = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{Par somme : } \lim_{n \rightarrow +\infty} -44 \times 0,94^n + 25 = 25 \quad \checkmark$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 25$ ✓

Ce qui veut dire que la température des gâteaux va tendre vers 25°C mais ne dépassera pas 25°C .

Par 0/0.

7) a) Comme T_n est la température des gâteaux au bout de n minutes. Alors au bout d'une demi-heure (30 min) :

0,5 $T_{30} = -44 \times 0,94^{30} + 25 \approx 18$ / (environ 18°C)

b) D'après la calculatrice Léila doit déguster son gâteau entre 17 et 18 minutes après l'avoir sortie :

0,5 $T_{17} \approx 9,6 \quad | \quad T_{18} \approx 10,5$

$$9,6 < 10 < 10,5$$

$$T_{17} < 10 < T_{18}$$

c)

def senil () :

$$n = 0$$

$$T = -19$$

while $T < 10$:

$$T = -44 * 0,94^{(n)} + 25$$

$$n = n + 1$$

return n

ok erreur de ma part

0,5

+

0,5

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION DE 2022/2023

BAC BLANC n°1

MATHÉMATIQUES

Spécialité Maths

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 HEURES

COEFFICIENT : 16

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3 .

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Le candidat doit traiter les deux exercices.

Chaque exercice choisi devra être rédigé sur une copie distincte.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (8 points)

Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7 % des habitants sont affectés par une certaine maladie.

Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie. Ce test a les caractéristiques suivantes :

- Pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans 20 % des cas ;
- Pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1 % des cas.

Une personne est choisie au hasard dans la population et testée.

On considère les événements suivants :

- M : « la personne est malade »;
- T : « le test est positif ».

1. Calculer la probabilité de l'évènement $M \cap T$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif, est de 0,0653.
3. Dans un contexte de dépistage de la maladie, est-il plus pertinent de connaître $P_M(T)$ ou $P_T(M)$?
4. On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif.
Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

5. On choisit des personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.

- (a) Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .
 - (b) Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.
6. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elle ait un test positif, soit supérieur à 99 %.

Exercice 2 (12 points)

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés.

Elle sort les gâteaux du congélateur à -19°C et les apporte sur la terrasse où la température est de 25°C .

Au bout de 10 minutes la température des gâteaux est de $1,3^\circ \text{C}$.

I – Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante c'est-à-dire que l'augmentation de la température est la même minute après minute.

Selon ce modèle, déterminer quelle serait la température des gâteaux 25 minutes après leur sortie du congélateur.

Ce modèle semble-t-il pertinent ?

II – Second modèle

On note T_n la température des gâteaux en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur ; ainsi $T_0 = -19$.

On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante

$$\text{Pour tout entier naturel } n, \quad T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25).$$

1. Justifier que, pour tout entier n , on a $T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$.
2. Calculer T_1 et T_2 . On donnera des valeurs arrondies au dixième.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $T_n \leq 25$.
En revenant à la situation étudiée, ce résultat était-il prévisible ?
4. Étudier le sens de variation de la suite (T_n) .
5. A l'aide de la calculatrice que peut-on conjecturer concernant la convergence de la suite (T_n) .
6. On pose pour tout entier naturel n , $U_n = T_n - 25$.
 - (a) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme U_0 .
 - (b) En déduire que pour tout entier naturel n , $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$.
 - (c) En déduire la limite de la suite (T_n) . Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.
7. (a) Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur.
Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux ? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.
 - (b) Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de 10 . Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.
 - (c) Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geq 10$.

```
def seuil() :  
    n=0  
    T= .....  
    while T..... :  
        T= .....  
        n=n+1  
    return n
```

Recopier ce programme sur la copie et compléter les lignes incomplètes afin que le programme renvoie la valeur attendue.

