Entraînement de terminale du 2022/09/12.

Exercice 1.

Partie A.

1.

— Référence explicite à l'énoncé.

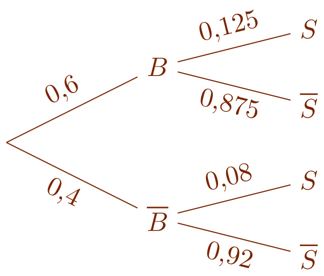
Justifions $\mathbb{P}_B(S)$.

D'après l'énoncé : $\mathbb{P}_B(S) = \frac{1}{8}$.
Donc

$$\boxed{\mathbb{P}_B(S) = 0{,}125.}$$

2.

— Nombre de niveaux.
— Nombre de branches à chaque embranchement.
— Probabilités du premier niveau.
— Probabilité du second niveau.



3.

— 1 condition d'utilisation de la formule.
— 1 nom de la formule.
— 1 formule.

— 1 substitution correcte dans la formule.
— 2 réponse numérique.

Calculons $\mathbb{P}(B \cap S)$.

Puisque $\mathbb{P}(B) = 0{,}6 > 0$, nous pouvons utiliser la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S \cap B) &= \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(S) \\ &= 0{,}6 \times 0{,}125 \\ &= 0{,}075\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B \cap S) = 0{,}075.}$$

4.

— 1 condition d'utilisation de la formule.
— 1 nom de la formule.
— 1 formule correcte.
— 1 substitution par les valeurs numériques correctes.
— 2 réponse numérique.

Calculons $\mathbb{P}(S)$.

$\{B,\overline{B}\}$ est un système complet d'événements, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(B \cap S) + \mathbb{P}(B \cap \overline{S})$$

D'après la question précédente et la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= 0{,}075 + \mathbb{P}(\overline{B}) \times \mathbb{P}_{\overline{B}}(S) \\ &= 0{,}075 + 0{,}4 \times 0{,}08\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(S) = 0{,}107.}$$

5.

— Condition pour probabilité conditionnelle.
— Formule de la définition d'une probabilité conditionnelle.
— Substitution par les valeurs numériques dans la formule littérale.
— Valeur numérique correcte.
— Respect de la valeur approchée.

Calculons $\mathbb{P}_S(B)$.

$\mathbb{P}(S) > 0$ donc, par définition de la probabilité composée :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_S(B) &= \frac{\mathbb{P}(S \cap B)}{\mathbb{P}(S)} \\ &= \frac{0{,}075}{0{,}107} \\ &\approx 0{,}7009 \text{ en tronquant à } 10^{-4}\end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{\mathbb{P}_S(B) \approx 0{,}701.}$$

Partie B.

1. (a)

— Choix épreuve.
— Choix succès.
— Probabilité du succès.
— Nombre de répétitions.
— Caractère indépendant des répétitions.
— Vérification que la variable aléatoire compte le nombre de succès.
— Phrase de conclusion.

Démontrons que X suit une loi binomiale.

* Épreuve de Bernoulli.

— Épreuve : interroger un marmaille en surpoids.
— Succès : « il consomme des boisons sucrées. »
— $p = 0{,}7$.

* Schéma de Bernoulli.

  Le choix de l'enfant étant répété $n = 35$ fois à l'identique et de façon indépendante nous pouvons affirmer qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli.

* Variable aléatoire.

  La variable aléatoire X compte le nombre de marmailles consommateurs de boissons sucrées parmi les 35 interrogés, donc le nombre de succès de notre schéma de Bernoulli.

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}(35; 0{,}7).}$$

(b)

— Expression avec la variable aléatoire de l'événement.
— Justification de formule par référence à la loi de probabilité.
— Formule littérale.
— Formule après substitution numérique.
— 2 points. Résultat numérique.

Calculons $\mathbb{P}(X = 3)$.

Puisque $X \hookrightarrow \mathscr{B}(35; 0{,}7)$, pour $k \in [\![0{,}35]\!]$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{35}{3} 0{,}7^3 \times (1 - 0{,}7)^{35-3}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X = 3) \approx 4{,}159 \times 10^{-14}.}$$

(c)

- Expression avec la variable aléatoire de l'événement.
- Utilisation correcte de la probabilité de l'événement contraire.
- Expression correcte avec la fonction de répartition.
- 2 points. Résultat numérique.

Calculons $\mathbb{P}(X \geqslant 10)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 10) &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{X \geqslant 10}\right)\\ &= 1 - \mathbb{P}(X < 10)\\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 9)\end{aligned}$$

Avec la calculatrice :

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geqslant 10) \approx 0{,}999\,999\,91 \times 10^{-8}.}$$

(d)

- Utiliser l'espérance.
- Justifier la formule de l'espérance dans le cas de la loi binomiale.
- Formule de l'espérance (y compris inappropriée).
- Résultat numérique.
- Phrase de conclusion interprétative.

Calculons $\mathbb{E}(X)$.

Puisque $X \hookrightarrow \mathscr{B}(35; 0{,}7)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= np\\ &= 35 \times 0{,}7\end{aligned}$$

> En recommençant un grand nombre de fois le choix des 35 enfants on obtiendrait en moyenne 24,5 consommateurs de boissons sucrées.

2. (a) $\boxed{Y = 400X.}$

(b)

— Évoquer la linéarité de l'espérance.
— Bon calcul.
— Bon résultat.

Calculons $\mathbb{E}(Y)$.

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(400X)$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= 400\mathbb{E}(X)\\ &= 400 \times 24{,}5\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = 9800 \text{ euros.}}$$

Exercice 2.

1.

— Annonce du procédé de démonstration.
— Choix de la proposition à démontrer.
— Mise en évidence de l'initialisation.
— Justification claire de l'égalité.
— Mise en évidence de l'hérédité.
— Choix d'un rang.
— Pose de l'hypothèse de récurrence.
— Utilisation de la formule de récurrence.
— Utilisation de l'hypothèse de récurrence.
— Démonstration de la véracité de $\mathscr{P}(n+1)$.
— Conclusion.

Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = 3 \times 2^n - 1$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* D'une part $u_0 = 2$, d'autre part $3 \times 2^0 - 1 = 2$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
* Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.
  D'après la formule de récurrence définissant (u_n) :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

  D'après lhypothèse de récurrence $u_n = 3 \times 2^n - 1$ donc en substituant :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2 \times \left(3 \times 2^n - 1\right) + 1 \\ &= 2 \times 3 \times 2^n - 2 \times 1 + 1 \\ &= 3 \times 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
* Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times 2^n - 1.}$$

2.

— Annonce du procédé de démonstration.
— Choix de la proposition à démontrer.
— Initialisation
— Utilisation de la formule de récurrence.
— Utilisation de l'hypothèse de récurrence.
— Justification des manipulations des inégalités.

Démontrons par récurrence que $\mathscr{Q}(n)$: « $v_n \leqslant 4$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* $v_0 = 2 \leqslant 4$ donc $\mathscr{Q}(0)$ est vraie.

* Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons que $\mathscr{Q}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{Q}(n+1)$ l'est aussi.
  D'après l'hypothèse de récurrence :

$$v_n \leqslant 4$$

  On en déduit :

$$\frac{v_n}{4} \leqslant \frac{v_n}{4} \text{ car } 4 > 0$$
$$\frac{v_n}{4} + 1 \leqslant 1 + 3$$

  D'après la formule de récurrecne définissant (v_n) :

$$v_{n+1} \leqslant 4$$

  Donc $\mathscr{Q}(n+1)$ est vraie.
* Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant 4.}$$

Exercice 3.