Entraînement de terminale du 2022/09/12.

Exercice 1.

Partie A.

Afin d'établir les liens entre le surpoids et l'alimentation, on interroge les enfants des écoles primaires d'une ville.

L'enquête révèle que 60 % des enfants boivent 1 boisson sucrée ou plus par jour.

Parmi les enfants buvant 1 boisson sucrée ou plus par jour, un enfant sur 8 est en surpoids, contre seulement 8 % pour les enfants buvant moins d'une boisson sucrée par jour.

On choisit un enfant au hasard parmi les enfants des écoles primaires de la ville et on considère les événements suivants :

B : « l'enfant boit 1 boisson sucrée ou plus par jour »,

S : « l'enfant est en surpoids ».

les événements contraire de B et de S sont notés respectivement $\overline{B}$ et $\overline{S}$.

Pour tous événements A et B, avec B un événement de probabilité non nulle, la probabilité de A sachant B est notée $\mathbb{P}_B(A)$.

1. Justifier que $\mathbb{P}_B(S) = 0{,}125$.

   — Référence explicite à l'énoncé.

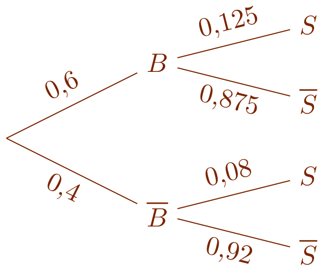
   Justifions $\mathbb{P}_B(S)$.

   D'après l'énoncé : $\mathbb{P}_B(S) = \frac{1}{8}$.
   Donc

   $$\boxed{\mathbb{P}_B(S) = 0{,}125.}$$

2. Représenter la situation par un arbre pondéré.

   — Nombre de niveaux.
   — Nombre de branches à chaque embranchement.
   — Probabilités du premier niveau.
   — Probabilité du second niveau.



3. Calculer $\mathbb{P}(B \cap S)$.

— 1 condition d'utilisation de la formule.
— 1 nom de la formule.
— 1 formule.
— 1 substitution correcte dans la formule.
— 2 réponse numérique.

Calculons $\mathbb{P}(B \cap S)$.

Puisque $\mathbb{P}(B) = 0{,}6 > 0$, nous pouvons utiliser la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S \cap B) &= \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(S)\\ &= 0{,}6 \times 0{,}125\\ &= 0{,}075\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B \cap S) = 0{,}075.}$$

4. Déterminer la probabilité que l'enfant soit en surpoids.

— 1 condition d'utilisation de la formule.

- 1 nom de la formule.
- 1 formule correcte.
- 1 substitution par les valeurs numériques correctes.
- 2 réponse numérique.

Calculons $\mathbb{P}(S)$.

$\{B,\overline{B}\}$ est un système complet d'événements, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(B \cap S) + \mathbb{P}(B \cap \overline{S})$$

D'après la question précédente et la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= 0{,}075 + \mathbb{P}(\overline{B}) \times \mathbb{P}_{\overline{B}}(S)\\ &= 0{,}075 + 0{,}4 \times 0{,}08\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(S) = 0{,}107.}$$

5. On a choisi un enfant en surpoids. Quelle est la probabilité qu'il boive 1 boisson sucrée ou plus par jour ? On arrondira le résultat au millième.

- Condition pour probabilité conditionnelle.
- Formule de la définition d'une probabilité conditionnelle.
- Substitution par les valeurs numériques dans la formule littérale.
- Valeur numérique correcte.
- Respect de la valeur approchée.

Calculons $\mathbb{P}_S(B)$.

$\mathbb{P}(S) > 0$ donc, par définition de la probabilité composée :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_S(B) &= \frac{\mathbb{P}(S \cap B)}{\mathbb{P}(S)}\\ &= \frac{0{,}075}{0{,}107}\\ &\approx 0{,}7009 \text{ en tronquant à } 10^{-4}\end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{\mathbb{P}_S(B) \approx 0{,}701.}$$

Partie B.

Dans une ville on souhaite vérifier si les problème de surpoids sont liés à la consommation de boisson sucrée.

On interroge 35 enfants en surpoids dans des écoles et on note s'ils sont consommateurs de boissons sucrées ou pas. On admet que la probabilité, à l'échelle nationale, qu'un enfant en surpoids consomme 1 boisson sucrée ou plus par jour est de 0,7.

1. On note X la variable aléatoire qui indique le nombre d'enfants, parmi les 35 interrogés, qui consomment des boissons sucrées.

   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres.

   — Choix épreuve.
   — Choix succès.
   — Probabilité du succès.
   — Nombre de répétitions.
   — Caractère indépendant des répétitions.
   — Vérification que la variable aléatoire compte le nombre de succès.
   — Phrase de conclusion.

   Démontrons que X suit une loi binomiale.

   * Épreuve de Bernoulli.
     — Épreuve : interroger un marmaille en surpoids.
     — Succès : « il consomme des boisons sucrées. »
     — $p = 0{,}7$.

   * Schéma de Bernoulli.
     Le choix de l'enfant étant répété $n = 35$ fois à l'identique et de façon indépendante nous pouvons affirmer qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli.

* Variable aléatoire.

La variable aléatoire X compte le nombre de marmailles consommateurs de boissons sucrées parmi les 35 interrogés, donc le nombre de succès de notre schéma de Bernoulli.

$$X \hookrightarrow \mathscr{B}(35; 0{,}7).$$

(b) Calculer la probabilité que 3 enfants parmi les 35 consomment des boissons sucrées.

— Expression avec la variable aléatoire de l'événement.
— Justification de formule par référence à la loi de probabilité.
— Formule littérale.
— Formule après substitution numérique.
— 2 points. Résultat numérique.

Calculons $\mathbb{P}(X = 3)$.

Puisque $X \hookrightarrow \mathscr{B}(35; 0{,}7)$, pour $k \in [\![0{,}35]\!]$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{35}{3} 0{,}7^3 \times (1 - 0{,}7)^{35-3}$$

$$\mathbb{P}(X = 3) \approx 4{,}159 \times 10^{-14}.$$

(c) Calculer la probabilité qu'au moins 10 des enfants consomment des boissons sucrées.

— Expression avec la variable aléatoire de l'événement.
— Utilisation correcte de la probabilité de l'événement contraire.
— Expression correcte avec la fonction de répartition.

— 2 points. Résultat numérique.

Calculons $\mathbb{P}(X \geqslant 10)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 10) &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{X \geqslant 10}\right)\\ &= 1 - \mathbb{P}(X < 10)\\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 9)\end{aligned}$$

Avec la calculatrice :

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geqslant 10) \approx 0{,}999\,999\,91 \times 10^{-8}.}$$

(d) Combien d'enfants consommateurs de boissons peut-on s'attendre à trouver dans le groupe des 35 ?

— Utiliser l'espérance.
— Justifier la formule de l'espérance dans le cas de la loi binomiale.
— Formule de l'espérance (y compris inappropriée).
— Résultat numérique.
— Phrase de conclusion interprétative.

Calculons $\mathbb{E}(X)$.

Puisque $X \hookrightarrow \mathscr{B}(35; 0{,}7)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= np\\ &= 35 \times 0{,}7\end{aligned}$$

En recommençant un grand nombre de fois le choix des 35 enfants on obtiendrait en moyenne 24,5 consommateurs de boissons sucrées.

2. Afin de modifier leurs habitudes de consommation, la mairie prévoit d'offrir des boissons désaltérantes sans sucres aux enfants qui usent de boissons sucrées.
   Les boissons offertes représentent une dépense de 400 € par enfant et par an.
   On note Y la variable aléatoire correspondant au montant des dépenses de la mairie pour cette école.

   (a) Exprimer Y en fonction de X.

   $$\boxed{Y = 400X.}$$

   (b) Quel est le montant des dépenses que doit prévoir la mairie pour un tel groupe de 35 enfants ?

   — Évoquer la linéarité de l'espérance.
   — Bon calcul.
   — Bon résultat.

   Calculons $\mathbb{E}(Y)$.

   $$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(400X)$$

   Par linéarité de l'espérance :

   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= 400\mathbb{E}(X)\\ &= 400 \times 24{,}5\end{aligned}$$

   $$\boxed{\mathbb{E}(Y) = 9800 \text{ euros.}}$$

Exercice 2.

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 3 \times 2^n - 1.$$

— Annonce du procédé de démonstration.
— Choix de la proposition à démontrer.
— Mise en évidence de l'initialisation.
— Justification claire de l'égalité.
— Mise en évidence de l'hérédité.
— Choix d'un rang.
— Pose de l'hypothèse de récurrence.
— Utilisation de la formule de récurrence.
— Utilisation de l'hypothèse de récurrence.
— Démonstration de la véracité de $\mathscr{P}(n+1)$.
— Conclusion.

Démontrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = 3 \times 2^n - 1$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* D'une part $u_0 = 2$, d'autre part $3 \times 2^0 - 1 = 2$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
* Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.
  D'après la formule de récurrence définissant (u_n) :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1$$

  D'après lhypothèse de récurrence $u_n = 3 \times 2^n - 1$ donc en substituant :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2 \times \left(3 \times 2^n - 1\right) + 1 \\ &= 2 \times 3 \times 2^n - 2 \times 1 + 1 \\ &= 3 \times 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
* Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times 2^n - 1.}$$

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 2$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{v_n}{4} + 3.$$

Démontrez par récurrence que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4.

— Annonce du procédé de démonstration.
— Choix de la proposition à démontrer.
— Initialisation
— Utilisation de la formule de récurrence.
— Utilisation de l'hypothèse de récurrence.
— Justification des manipulations des inégalités.

Démontrons par récurrence que $\mathcal{Q}(n)$: « $v_n \leqslant 4$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* $v_0 = 2 \leqslant 4$ donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.
* Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathcal{Q}(n+1)$ l'est aussi.
  D'après l'hypothèse de récurrence :

$$v_n \leqslant 4$$

  On en déduit :

$$\frac{v_n}{4} \leqslant \frac{v_n}{4} \text{ car } 4 > 0$$
$$\frac{v_n}{4} + 1 \leqslant 1 + 3$$

  D'après la formule de récurrecne définissant (v_n) :

$$v_{n+1} \leqslant 4$$

  Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.
* Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant 4.}$$

Exercice 3.

Étudiez les variations de $h : x \mapsto \dfrac{x\mathrm{e}^{x^2}}{x^2 - 1}$.