Des exercices à faire tous les deux jours.

En cas de difficultés envoyez moi un mail : mon adresse mail.

Pour se préparer à la prépa.

— Un premier bouquin qui se veut progressif et avec de exercices qui restent de niveau lycée : le manuel en question.
— Un deuxième livre avec des exercices qu'il faut savoir faire absolument : le manuel en question.

Pour jeudi 19/01/2023.

Exercice 1.

On étudie deux jeux vidéos.

Partie A : premier jeu.
Statistiquement :

- si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\frac{2}{5}$.
- si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.
Le joueur gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Représentez la situation par un arbre pondéré.
2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.
3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.
   (b) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.
   (c) Déterminer la limite de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

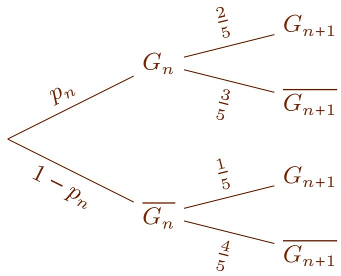
Partie B : second jeu.
Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties. On suppose que toutes les parties sont indépendantes. La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\frac{1}{4}$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
   (b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.
   (c) Déterminer l'espérance de X.
2. Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €.
   (a) Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.
   (b) Calculer la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40 €. Le résultat sera arrondi à 10^{-5} près.

Correction de l'exercice 1

Partie A.

1.



2. Justifions la formule de récurrence de (p_n).

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   $\{G_n,\overline{G_n}\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(G_{n+1}) = \mathbb{P}(G_n \cap G_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{G_n} \cap G_{n+1})$$

   G_n étant de probabilité non nulle, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G_{n+1}) &= \mathbb{P}(G_n) \times \mathbb{P}_{G_n}(G_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{G_n}) \times \mathbb{P}_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{2}{5} + (1-p_n) \times \frac{1}{5}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = \tfrac{1}{5}p_n + \tfrac{1}{5}.}$$

3. (a) Démontrons que (u_n) est géométrique.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{5}p_n - \frac{1}{20} \\ &= \frac{1}{5}p_n - \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{5}p_n\end{aligned}$$

Nous avons démontré que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = u_n$. Comme de plus $u_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ nous pouvons conclure :

(u_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = \frac{3}{4}$.

(b) Déterminons l'expression explicite du terme général de (p_n).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Puisque $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique :

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 \times q^{n-1} \\ &= \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} p_n &= u_n + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \tfrac{3}{4} \times \left(\tfrac{1}{5}\right)^{n-1} + \tfrac{1}{4}.$$

(c) Déterminons la limite de (p_n).

Puisque $-1 < \frac{1}{5} < 1$: $\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
D'où :

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tfrac{1}{4}.$$

Partie B.

1. (a) Déterminons $\mathbb{P}_X$.

Jouer une partie est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « gagner la partie » avec une probabilité de $p = \frac{1}{4}$.
L'épreuve étant répétée à l'identique et de façon indépendante $n = 10$ fois, l'expérience est un schéma de Bernoulli.
X compte le nombre de parties gagnées parmi les 10 jouées, donc le nombre de succès, et par conséquent

$$X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(10, \tfrac{1}{4}\right).$$

(b) Calculons $\mathbb{P}(X \geqslant 1)$.

Puisque $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(10, \frac{1}{4}\right)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geqslant 1) &= 1 - \mathbb{P}(X < 1) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X = 0), \text{ car } X \text{ est à valeurs entières} \\
&= 1 - \binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-0} \\
&= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \\
&\approx 0{,}943
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geqslant 1) \approx 0{,}94.}$$

(c) Calculons $\mathbb{E}(X)$.

Puisque $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(10, \frac{1}{4}\right)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= n \times p \\
&= 10 \times \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \tfrac{5}{2}.}$$

2. (a) On nous parle de jeu défavorable c'est une situation typique d'utilisation d'espérance il faut identifier la bonne variable aléatoire.

Notons Y la variable aléatoire qui à une série de 10 parties associe le montant gagné ou perdu par le joueur.

Calculons $\mathbb{E}(Y)$.

On remarque que $Y = 8X - 30$ donc, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= 8\mathbb{E}(X) - 30 \\
&= 8 \times \frac{5}{2} - 30 \\
&= -10
\end{aligned}$$

Ainsi, en moyenne, quelqu'un qui recommencerait les 10 parties un très grand nombre de fois perdrait 10 euros.

Le jeu est défavorable au joueur.

(b) Calculons $\mathbb{P}(Y \geqslant 40)$.

$$\begin{aligned} Y \geqslant 40 &\iff 8X - 30 \geqslant 40 \\ &\iff X \geqslant \frac{70}{8} \\ &\iff X \geqslant 8{,}75 \end{aligned}$$

Puisque X est à valeurs entière :

$$Y \geqslant 40 \iff X \geqslant 9$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \geqslant 40) &= \mathbb{P}(X \geqslant 9) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X < 9) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 8) \\ &\approx 2{,}9 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

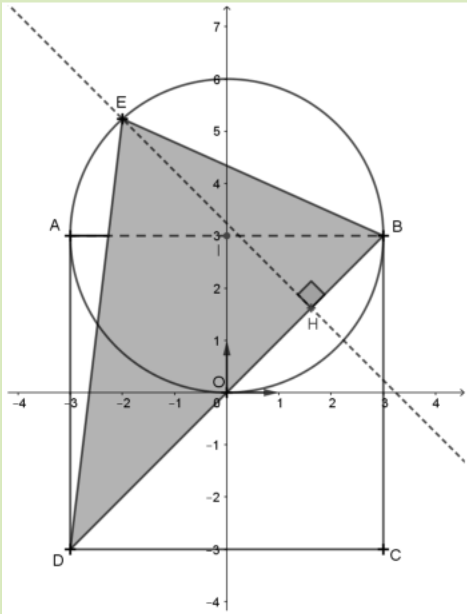
$\mathbb{P}(Y \geqslant 40) \approx 3 \times 10^{-5}$.

Pour mardi 17/01/2023.

Niveau première pour réviser les outils de géométrie plane que nous généraliserons à la rentrée.

Exercice 2.

On considère une figure formée d'un carré, d'un cercle et d'un triangle.
Elle a été représenté ci-dessous dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.



On donne les coordonnées des sommets du carré : $A(-3;3)$, $B(3;3)$, $C(3;-3)$, $D(-3;-3)$. On considère le point $E(-2;3+\sqrt{5})$. On admettra que E est situé sur le cercle de diamètre $[AB]$. On note I le milieu de $[AB]$.

1. Donner une équation cartésienne de la droite (BD) et une équation du cercle de diamètre $[AB]$.
2. Montrer que la hauteur du triangle BDE issue de E admet pour équation cartésienne $x+y-(1+\sqrt{5})=0$.
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point E sur la droite (BD).
4. Calculer l'aire du triangle BDE (en unités d'aire).
5. Montrer que $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE} = 42+6\sqrt{5}$. On admet que $\left\|\overrightarrow{DE}\right\| = \sqrt{42+12\sqrt{5}}$; en déduire la mesure de l'angle $\widehat{BDE}$ au degré près.

Correction de l'exercice 2

1. * Déterminons une équation cartésienne de (BD).

   Soit $M(x,y)$ un point.
   $M \in (BD)$ si et seulement si $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires.
   Donc

$$\begin{aligned} M \in (BD) &\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BD}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & -3-3 \\ y-3 & -3-3 \end{vmatrix} \\ &\Leftrightarrow (x-3)\times(-6) - (y-3)\times(-6) = 0 \\ &\Leftrightarrow -6x + 18 + 6y - 18 = 0 \\ &\Leftrightarrow -x + y = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{(BD) : \ -x + y = 0.}$$

Évidemment nous retrouvons l'équation de la première bissectrice (courbe représentative de la fonction identité) : $y = x$.

Déterminons une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.

Soit $M(x,y)$ un point.
Le repère étant orthonormé (on confond donc longueur et norme) et I étant le milieu de $[AB]$, $M \in \mathscr{C}$ si et seulement si $\left\|\overrightarrow{IM}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$.
Or

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$,
- $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc $I(0;3)$,
- $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x\\y-3\end{pmatrix}$,

donc

$$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 = 6^2 + 0^2$$

$$\boxed{\mathscr{C} : \ x^2 + (y-3)^2 = 36.}$$

2. Déterminons une équation cartésienne de la hauteur (d) issue de E dans BDE.

   Soit $M(x,y)$ un point.
   $M \in (d)$ si et seulement si $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
   Or $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix}x+2\\y-3-\sqrt{5}\end{pmatrix}$ donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 &\Leftrightarrow -6 \times (x+2) + (-6) \times (y-3-\sqrt{5}) = 0\\ &\Leftrightarrow -6x - 6y + 6 + 6\sqrt{5} = 0\end{aligned}$$

   En multipliant par $-\frac{1}{6}$ les deux membres de l'équation :

$$\boxed{(d) : \ x + y - (1+\sqrt{5}) = 0.}$$

3. Déterminons les coordonnées de H.

   $H \in (d) \cap (BD)$ autrement dit H est le point d'intersection des deux droites) donc les coordonnées x et y de H vérifient

$$\begin{cases} x + y - (1+\sqrt{5}) = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

   Ce système est de résolution immédiate par substitution car $y = x$.

$$\boxed{H\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).}$$

4. Calculons l'aire de $\mathscr{A}$ de BDE.

   Puisque H est le projeté orthogonal de E sur (BD) :

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2} \times EH \times BD$$

   Or le repère étant orthonormé :

$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2}\\ &= \sqrt{72}\\ &= \sqrt{2^3 \times 3^2}\\ &= 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} EH &= \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+2\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-3-\sqrt{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}(5+\sqrt{5})+\frac{1}{4}(5+\sqrt{5})} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{25+10\sqrt{5}+5+25+10\sqrt{5}+5)} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{60+20\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{15+5\sqrt{5}} \end{aligned}$$

donc

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}\times\sqrt{15+5\sqrt{5}}\times 6\sqrt{2}$$

$$\boxed{\mathscr{A} = 3\sqrt{30+10\sqrt{5}}.}$$

5. * Calculons $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE}$.

$\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1\\6+\sqrt{5}\end{pmatrix}$ donc

$$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE} = 6\times 1+6\times(6+\sqrt{5})$$

$$\boxed{\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE} = 42+6\sqrt{5}.}$$

Déterminons une mesure de $\widehat{BDE}$.

Nous savons

$$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE} = \left\|\overrightarrow{BD}\right\|\times\|DE\|\times\cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DE}\right)$$

donc

$$42+6\sqrt{5} = 6\sqrt{2}\times\sqrt{42+12\sqrt{5}}\times\cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DE}\right)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\cos\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DE}\right) &= \frac{42+6\sqrt{5}}{6\sqrt{2}\times\sqrt{42+12\sqrt{5}}}\\ &= \frac{7+\sqrt{5}}{2\sqrt{21+6\sqrt{5}}}\end{aligned}$$

Avec la calculatrice (le $\sin^{-1}$ de la Ti) :

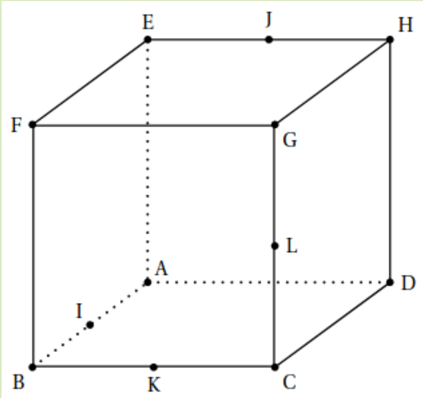
$$\widehat{BDE} \approx 51{,}92$$

$$\boxed{\widehat{BDE} \approx 52.}$$

Pour samedi 14/01/2023.

Exercice 3.

ABCDEFGH est un cube.



I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG].
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).
2. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.
3. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

Correction de l'exercice 3

1. Déterminons une représentation paramétrique de (FD).

   Pour trouver une représentation paramétrique de (FD) il suffit d'en connaître une point et un vecteur directeur par leurs coordonnées. Commençons par cela.
   Il est naturel de travailler avec les points F et D qui définissent la droite (FD).

   * Par lecture graphique : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$.
     Ainsi : $\overrightarrow{AF} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD} + 1 \cdot \overrightarrow{AE}$ et donc, dans le repère $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$:
     $$F(1;0;1).$$
   * De même :
     $$D(0;1;0).$$
   * Je fais le choix de trouver les coordonnées de $\overrightarrow{DF}$ de façon calculatoire mais nous aurions pu faire de la lecture graphique.

Donc
$$\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} x_F - x_D \\ y_F - y_F \\ z_F - z_D \end{pmatrix}.$$
Nous en déduisons successivement :
$$\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-1 \\ 1-0 \end{pmatrix},$$
$$\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Nous en déduisons une représentation paramétrique de la droite passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{DF}$:

$$\boxed{(DF) : \begin{cases} x = t+1 \\ y = -t \\ z = t+1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.}$$

2. La question incite à penser que le triangle est remarquable : isocèle ou rectangle. Avec un peu de bon sens, la figure permet de conjecturer qu'il n'est pas isocèle. Reste donc rectangle. Là encore l'observation de la figure permet de conjecturer un angle droit en I.

   Démontrons que IJK est rectangle en I.

   N'ayant pas encore revu le produit scalaire nous allons nous tourner vers la réciproque du théorème de Pythagore.
   Par lecture graphique : $I\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $J\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ et $K\left(1;\frac{1}{2};0\right)$.
   Le repère étant orthonormé pour que norme et longueur coïncident) :
$$\begin{aligned} IJ^2 &= \left\|\overrightarrow{IJ}\right\|^2 \\ &= (x_I - x_J)^2 + (y_I - y_J)^2 + (z_I - z_J)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + (0-1)^2 \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$
   En procédant de même : $JK^2 = 2$ et $IK^2 = \frac{1}{2}$.
   Remarquons que $JK^2 = IK^2 + IJ^2$.
   Nous en déduisons, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, que

IJK est rectangle en I.

Calculons l'aire $\mathscr{A}$ de IJK.

Puisque IJK est rectangle en I :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \frac{1}{2} \times IJ \times IK \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$\mathscr{A} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

3. Rassurez-vous cette question n'est pas dans un sujet de bac. Pas de question ouverte aussi compliquée dans un sujet de bac.

Déterminons si les droites (IJ) et (KL) sont sécantes.

Dans l'espace la non colinéarité des vecteurs directeurs ne suffit pas. Recherchons les coordonnées d'un éventuel point d'intersection.
En procédant comme dans la question 1

$$(IJ) : \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$$

et

$$(KL) : \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2}s \end{cases}, \; s \in \mathbb{R}$$

Pour $t = -1$ et $s = -2$ on obtient bien les mêmes coordonnées.

(IJ) et KL sont sécantes au point $S\,(1; -frac12; -1)$.

Pour jeudi 12/01/2023.

Exercice 4.

1. Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $u(x) = \ln(x) + x - 3$.
   (a) Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   (b) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
   (c) En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2.$$

   On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.
   (a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
   (b) i. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la question 1.
   ii. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
3. Soit $\mathcal{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.
   (a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$,

$$f(x) - \ln(x) = \frac{2 - \ln(x)}{x}.$$

   En déduire que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.
   (b) Démontrez que la fonction H définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$H(x) = \frac{1}{2}[\ln(x)]^2$$

   admet pour dérivée la fonction h définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$h(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

Correction de l'exercice 4

1. (a) Étudions la monotonie de u.

   u est une somme de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$u'(x) = \frac{1}{x} + 1.$$

Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors $u'(x)$ est la somme de deux nombres strictement positifs, et donc $u'(x) > 0$.

$$\boxed{u \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

(b) Démontrons que $u(x) = 0$ admet une unique solution dans $]2;3[$.

* $u(2) = \ln(2) - 1 < 0$.
* $u(3) = \ln(3) + 1 > 0$.
* u est strictement croissante sur $]2;3[$.
* u est continue (comme somme de fonctions continues) sur $]2;3[$.

Nous en déduisons, d'après le théorème de la bijection, que u réalise une bijection de $]2;3[$ sur $]\ln(2) - 1, \ln(3) + 1[$.
Enfin comme $0 \in]\ln(2) - 1, \ln(3) + 1[$,

$$\boxed{u(x) = 0 \text{ admet un unique solution } \alpha \text{ dans }]0;3[.}$$

(c) Donnons le tableau de signe de u.

Puisque u est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'annule en α :

x	0		α		$+\infty$
u	$\|\|$	$-$	0	$+$	

2. (a) Étudions l'éventuelle limite de f en 0.

* $\frac{1}{x} \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} +\infty$ donc $1 - \frac{1}{x} \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} -\infty$.
* $\ln(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} -\infty$ donc $\ln(x) - 2 \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} +\infty$.

Nous déduisons des deux points précédents par produit : $\left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} +\infty$.
Enfin, par somme,

$$\boxed{f(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\longrightarrow} +\infty.}$$

Ainsi $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

(b) i. Déterminons f'.

$f-2$ est un produit, vw, de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$v : x \mapsto 1 - \frac{1}{x} \text{ et } w : x \mapsto \ln(x) - 2.$$

Donc $f-2$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $(f-2)' = f' = v'w + vw'$.
Or $v'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $w'(x) = \frac{1}{x}$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2} \times [\ln(x) - 2] + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x^2}\left(\ln(x) - 2 + x\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \frac{1}{x^2}\left(\ln(x) - 2 + x - 1\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}.}$$

ii. Étudions le sens de variation de f.

D'après la question précédente $f'(x)$ est du signe de $\frac{u(x)}{x^2}$ donc, d'après la question 1.(c) :

x	0		α		$+\infty$
f'	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. (a) * Exprimons $f(x) - \ln(x)$ en fonction de x.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} f(x) - \ln(x) &= \frac{x-1}{x}[\ln(x) - 2] + \frac{2x}{x} - \frac{x\ln(x)}{x} \\ &= \frac{(x-1)[\ln(x) - 2] + 2x - x\ln(x)}{x} \\ &= \frac{x\ln(x) - \ln(x) - 2x + 2 + 2x - x\ln(x)}{x} \end{aligned}$$

Enfin

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) - \ln(x) = \frac{2-\ln(x)}{x}.}$$

* Déterminons $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} f(x) - \ln(x) = 0 &\iff \frac{2-\ln(x)}{x} = 0 \\ &\iff 2 - \ln(x) = 0 \\ &\iff 2 = \ln(x) \\ &\iff \mathrm{e}^2 = x \end{aligned}$$

Ainsi

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont un unique point d'intersection qui a pour coordonnées $(\mathrm{e}^2, 2)$.

(b) Déterminons H'.

$H = g \circ h$ avec $h : x \mapsto \ln(x)$ et $g : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et g est dérivable sur $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Comme $H' = g' \circ h \times h'$ et comme $g' : x \mapsto x$ et $h' : x \mapsto \frac{1}{x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$H'(x) = \ln(x) \times \frac{1}{x}$$

Autrement dit

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ H'(x) = \frac{\ln(x)}{x}.}$$

Pour jeudi 05/01/2023.

Exercice 5.

Soit α un nombre réel fixé non nul.
Cet exercice a pour objet l'étude de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_0 = \alpha$ et, quelque soit n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = \mathrm{e}^{2v_n} - \mathrm{e}^{v_n}$.
On remarquera que l'on peut aussi écrire : $v_{n+1} = \mathrm{e}^{v_n}\left(\mathrm{e}^{v_n} - 1\right)$.

1. Soit h la fonction définie pour tout réel x par : $h(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - x$.
   (a) Calculer $h'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $h'(x) = \left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)\left(2\mathrm{e}^{x} + 1\right)$.
   (b) Déterminer les variations de la fonction h et donner la valeur de son minimum.
   (c) En remarquant que $v_{n+1} - v_n = h(v_n)$, étudier le sens de variation de la suite (v_n).
2. Dans cette question, on suppose que $\alpha \leqslant 0$.
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 0$.
   (b) Déduire des questions précédentes que la suite (v_n) est convergente.
   (c) Dans le cas où α vaut 0, donner la limite de la suite (v_n).
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha > 0$. La suite (v_n) étant croissante, la question 1 permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $v_n > \alpha$.
   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} - v_n \geqslant h(\alpha)$.
   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \geqslant \alpha + n \times h(\alpha)$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (v_n).
4. Dans cette question, on prend $\alpha = 0{,}02$.
   L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $v_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

```
import math
def pluspetit(M):
  u=0.02
  n=0
  while ....
    ....
    ....
  return n
```

   (a) Sur la copie, recopier en complétant.
   (b) Déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.

Correction de l'exercice 5

1. (a) * Déterminons h'.

   h est une somme de fonction composées d'exponentielles toutes dérivables sur $\mathbb{R}$ donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

   $$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ h'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 1.}$$

   * Démontrons l'expression de h' proposée par l'énoncé.

   Partons de la forme factorisée et développons-la.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $$\begin{aligned}\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)\left(2\mathrm{e}^{x}+1\right) &= \mathrm{e}^{x}\times 2\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}\times 1+(-1)\times 2\mathrm{e}^{x}+(-1)\times 1\\ &= 2\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}-2\mathrm{e}^{x}-1\\ &= 2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}-1 && = h'(x)\end{aligned}$$

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \left(\mathrm{e}^{x}-1\right)\left(2\mathrm{e}^{x}+1\right).}$$

(b) Étudions la variation de h.

   *

   $$\begin{aligned}\mathrm{e}^{x}-1>0 &\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{x}>1\\ &\Longleftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^{x}\right)>\ln(1), \text{ car ln est strictement croissante}\\ &\Longleftrightarrow x>0\end{aligned}$$

   De même $\mathrm{e}^{x}-1=0 \Longleftrightarrow x=0$.

   * La fonction exponentielle est strictement positive donc $2\mathrm{e}^{x}+1>0$.
   * $h(0)=0$.
   * En factorisant par e^{x} :

   $$h(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x}-1-\frac{x}{\mathrm{e}^{x}}\right).$$

   Donc

   $$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty.$$

   * Clairement

   $$\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty.$$

   Nous déduisons des points précédents :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$2e^x + 1$		$+$		$+$	
h'		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(c) * Démontrons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = h(v_n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$h(v_n) = e^{2v_n} - e^{v_n} - v_n$$

donc :

$$h(v_n) = v_{n+1} - v_n$$

* Étudions la monotonie de (v_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente h est positive donc $v_{n+1} - v_n = h(v_n) \geqslant 0$.
D'où

$$\boxed{(v_n) \text{ est croissante.}}$$

2. (a) Démontrons par récurrence que s'assertion $\mathscr{P}(n)$:« $v_n \leqslant 0$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* $v_0 = \alpha$ et, par hypothèse, $\alpha \leqslant 0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
* Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence,

$$v_n \leqslant 0$$

donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{v_n} &\leqslant \mathrm{e}^0 \\ \mathrm{e}^{v_n} - 1 &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Et pusique $\mathrm{e}^{v_n} > 0$:

$$\mathrm{e}^{v_n}\left(\mathrm{e}^{v_n} - 1\right) \leqslant 0$$

Autrement dit :

$$v_{n+1} \leqslant 0$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant 0.}$$

(b) D'après la question 1.(c), (v_n) est croissante et d'après la question précédente, (v_n) est majorée donc

$$\boxed{(v_n) \text{ est convergente.}}$$

(c) Déterminons la suite si $\alpha = 0$.

Si $v_0 = 0$ alors $v_1 = 1 - 1 = 0$ donc, par une itération immédiate

$$\boxed{\text{si } \alpha = 0, \text{ alors } (v_n) \text{ est la suite nulle et elle converge donc vers } 0.}$$

3. (a) Démontrons : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n \geqslant h(\alpha)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} - v_n = h(v_n)$$

Or $v_n > \alpha$ donc, h étant croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$h(v_n) \geqslant h(\alpha)$$

et donc, par transitivité

$$v_{n+1} - v_n \geqslant h(\alpha)$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n \geqslant h(\alpha).}$$

(b) Démontrons par récurrence que $\mathcal{Q}(n)$:« $v_n \leqslant \alpha + nh(\alpha)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* $v_0 = \alpha = \alpha + 0 \times h(\alpha)$. Donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.
* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{Q}(n)$ et démontrons $\mathcal{Q}(n+1)$.
  D'après la question précédente :

$$v_{n+1} \geqslant v_n + h(\alpha)$$

d'où, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$v_{n+1} \geqslant \alpha + nh(\alpha) + h(\alpha)$$
$$v_{n+1} \geqslant \alpha + (n+1)h(\alpha)$$

Autrement dit $\mathcal{Q}(n+1$ est vraie.

Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant \alpha + nh(\alpha).}$$

(c) Déterminons la limite de (v_n).

$\lim_{n\to+\infty} \alpha + nh(\alpha) = +\infty$ car $h(\alpha) = h(v_0) > 0$.
Donc, d'après la question précédente, par comparaison des limites

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.}$$

4. (a) Le "math." n'est pas indispensable.

```
import math
def pluspetit(M):
u=0.02
n=0
while u<M:
u=math.exp(2*u)-math.exp(u)
n=n+1
return n
```

(b) En faisant tourner le programme on obtient

$$\boxed{n = 36.}$$

Pour jeudi 29/12/2022.

Exercice 6.

Un appareil d'entraînement sportif lance des balles au hasard, à droite et à gauche du joueur avec la même probabilité.

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} *près.*

1. Le sportif s'apprête à recevoir une série de 20 balles.
   (a) Quelle est la probabilité que la machine lance 10 balles à droite ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'entre 5 et 10 balles soient envoyées à droite ?
2. On se rend compte que la machine est quelque peu déréglée. La probabilité qu'une balle soit envoyée à droite est de 0,42.
   Sur un total de 230 lancers quel nombre de balles envoyées à droites peut-on s'attendre à obtenir ?
3. Pour augmenter la difficulté le joueur paramètre la machine de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ». La probabilité que l'appareil envoie une balle à droite est de 0,42.
   Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :
   - la probabilité que la balle envoyée soit une balle liftée à droite est 0,21 ;
   - la probabilité que la balle soit une balle coupée à gauche est 0,235.

   Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?

Correction de l'exercice 6

1. (a) Modélisons la situation.

   * Chaque lancé de balle constitue une épreuve de Bernoulli dont le succès, « à droite », est réalisé avec une probabilité de 0,5 et dont l'échec est « à gauche ».
   * On effectue 20 lancés à l'identique et de façon indépendante. Nous avons donc un schéma de Bernoulli.
   * En notant X le nombre de balles obtenues à droites, nous définissons une variable aléatoire qui compte le nombre de succès dans le précédente schéma de Bernoulli.

   Ainsi

   $$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(20, \tfrac{1}{2}\right).}$$

   Calculons $\mathbb{P}(X = 10)$.

   Puisque $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(20, \frac{1}{2}\right)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ \mathbb{P}(X=10) &= \binom{20}{10}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^{20-10}\\ &\approx 0{,}17619\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X=10)\approx 0{,}176.}$$

(b) Calculons $\mathbb{P}(5 \leqslant X \leqslant 10)$.

Comme souvent nous devons faire apparaître la fonction de répartition de X : $F_X : x \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant x)$.
Ce qui suit est technique mais simple à comprendre : $\mathbb{P}(5 \leqslant X \leqslant 10) = \mathbb{P}(X \leqslant 10) - \mathbb{P}(X < 5)$. Donnons-en une illustration géométrique. Soit A, B, C et D des points alignés dans cet ordre : $BC = AC - AB$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(5 \leqslant X \leqslant 10) &= \mathbb{P}(\{5 \leqslant X\} \cap \{X \leqslant 10\})\\ &= \mathbb{P}(5 \leqslant X) + \mathbb{P}(X \leqslant 10) - \mathbb{P}(\{5 \leqslant X\} \cup \{X \leqslant 10\})\\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{5 \leqslant X}\right) + \mathbb{P}(X \leqslant 10) - 1\\ &= \mathbb{P}(X \leqslant 10) - \mathbb{P}(X \leqslant 4)\end{aligned}$$

Avec la calculatrice :

$$\mathbb{P}(5 \leqslant X \leqslant 10) \approx 0{,}58218$$

$$\boxed{\mathbb{P}(5 \leqslant X \leqslant 10) \approx 0{,}582.}$$

2. La formulation de la question demande le résultat que l'on peut espérer obtenir.
Notons Y la variable aléatoire comptant le nombre balles lancées à droite parmi les 230 lancés.
En raisonnant comme précédemment nous établirions que $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(230{,}0{,}42)$,

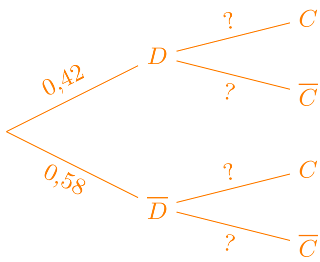
Calculons $\mathbb{E}(Y)$.

Puisque $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(230{,}0{,}42)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= n\times p\\ &= 230\times 0{,}42\\ &= 96{,}6\end{aligned}$$

Sur 230 lancés on peut s'attendre à ce que 96,6 balles soient lancées à droite.

3. Schématisons la situation par un arbre pondéré :



Et nous savons de plus que : $\mathbb{P}(D \cap \overline{C}) = 0{,}24$ et $\mathbb{P}(\overline{D} \cap C) = 0{,}235$.

* Par définition des probabilités conditionnelles ;

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_D(\overline{C}) &= \frac{\mathbb{P}(D \cap \overline{C})}{\mathbb{P}(D)} \\ &= \frac{0{,}21}{0{,}42} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

* Donc, puisque $\mathbb{P}_D$ est une probabilité :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_D(C) &= 1 - \mathbb{P}_D(\overline{C}) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

* $\{D, \overline{D}\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(D \cap C) + \mathbb{P}(\overline{D} \cap C)$$

$\mathbb{P}(D) \neq 0$ donc, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(D) \times \mathbb{P}_D(C) + 0{,}235 \\ &= 0{,}42 \times \frac{1}{2} + 0{,}235 \\ &= 0{,}445 \end{aligned}$$

* D'après la définition de la probabilité composée

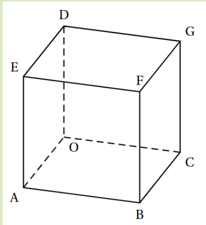
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_C(D) &= \frac{\mathbb{P}(C \cap D)}{\mathbb{P}(D)} \\ &= \frac{0{,}21}{0{,}445} \\ &\approx 0{,}47191\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_C(D) \approx 0{,}472.}$$

Pour mardi 27/12/2022.

Exercice 7.

On considère le cube $OABCDEFG$ d'arête de longueur 1.



Soient les points P et Q tels que $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OQ} = 4\overrightarrow{OC}$.
On appelle R le point tel que $2\overrightarrow{RF} - \overrightarrow{RB} = \vec{0}$.
L'espace est muni du repère orthonormal $\left(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right)$.

1. (a) Démontrez que le point R a pour coordonnées $(1;1;2)$.
   (b) Démontrez que les points P, Q et R ne sont pas alignés.
2. Vérifiez que le point D n'appartient pas au plan (PQR).
   On admettra que $\left(P; \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right)$ *est un repère du plan* (PQR).
3. On considère la droite d de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$ et passant par D.
   (a) Déterminez un système de représentation paramétrique de la droite d.
   (b) Démontrez que le point $H\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ appartient à d.

Correction de l'exercice 7

1. (a) Déterminons les coordonnées de R.

   Je fais le choix de répondre à la question comme si la réponse n'était pas donnée par l'énoncé. Il serait plus simple de vérifier que ces coordonnées conviennent bien.

   * $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ donc $F\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

   * De même $B\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

   * Nous déduisons des points précédents que $2\overrightarrow{RF} - \overrightarrow{RB}\begin{pmatrix}2(1-x_R)-(1-x_R)\\2(1-y_R)-(1-y_R)\\2(1-z_R)-(0-z_R)\end{pmatrix}$

et donc $2\overrightarrow{RF} - \overrightarrow{RB}\begin{pmatrix}1-x_R\\1-y_R\\2-z_R\end{pmatrix}$.

* L'égalité vectorielle $2\overrightarrow{RF} - \overrightarrow{RB} = \overrightarrow{0}$ se traduit, en considérant les coordonnées par le système :

$$\begin{cases}1-x_R=0\\1-y_R=0\\2-z_R=0\end{cases}$$

La résolution de ce dernier système est immédiate et nous obtenons :

$$\boxed{R(1,1,2).}$$

(b) P, Q et R sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont colinéaires.

Démontrons que $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ ne sont pas colinéaires.

* $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA}$ donc $P(2;0;0)$.
  $\overrightarrow{OQ} = 4\overrightarrow{OC}$ donc $Q(0;4;0)$.
* $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}x_Q-x_P\\y_Q-y_P\\z_Q-z_P\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$.
  De même $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$.
* Il suffit de considérer les premières coordonnées pour s'assurer que $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ ne sont pas colinéaires :
  $\begin{vmatrix}-2 & -1\\4 & 1\end{vmatrix} = -2\times 1 - 4\times(-1) = 2 \neq 0.$
  Ainsi $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ ne sont pas colinéaires donc

$$\boxed{P,\ Q \text{ et } R \text{ ne sont pas alignés.}}$$

2. $D \in (PQR)$ si et seulement si il existe des nombres a et b tels que $\overrightarrow{PD} = a\overrightarrow{PQ} + b\overrightarrow{PR}$. Cette égalité se traduit, en considérant les coordonnées, par le système :

$$\begin{cases}-2a - b = 0\\4a + b = 0\\2b = 1\end{cases}$$

Résolvons ce système.

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -2a & - & b & = & 0 \\ 2a & & & = & 0 \\ & & b & = & \frac{1}{2} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + l_1 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -2a & & & = & \frac{1}{2} \\ a & & & = & 0 \\ & & b & = & \frac{1}{2} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \end{array}$$

Finalement

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a & & & = & -\frac{1}{4} \\ a & & & = & 0 \\ & & b & = & \frac{1}{2} \end{array}\right. \quad L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}$$

Les deux premières égalités se contredisent : il n'y a pas de solution à ce système.

$$\boxed{D \notin (PQR).}$$

3. (a) Puisque $\left(D; \overrightarrow{u}\right)$ est un repère de la droite d un système de représentation est :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = 4t \\ y = 2t \\ z = t + 1 \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}.}$$

4. $H \in d$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} x_H = 4t \\ y_H = 2t \\ z_H = t + 1 \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}.$$

Notons S ce système.

Résolvons S.

S équivaut successivement à :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{4}{3} = 4t \\ \frac{2}{3} = 2t \\ \frac{4}{3} = t + 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3} = t \\ \frac{1}{3} = t \\ \frac{1}{3} = t \end{array}\right.$$

Ainsi il existe $t \in \mathbb{R}$ pour lequel on obtient les coordonnées de H et donc

$$\boxed{H \in d.}$$

Pour samedi 24/12/2022.

Plutôt technique et assez long.

Exercice 8.

1. Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\psi(x) = (x^2 + x + 1)\mathrm{e}^{-x} - 1.$$
   (a) Déterminez les limites de ψ en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) Étudiez le sens de variation de ψ puis dressez son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.
   (c) Démontrez que l'équation $\psi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont une dans l'intervalle $[1, +\infty[$, qui sera noté α.
   Déterminez un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   (d) Déduisez-en le signe de $\psi(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions f et g sont définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x+1}{x^2 + x + 1}.$$
   Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ sont notées $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
   (a) Démontrez que les deux courbes passent par le point A de coordonnées $(0; 1)$ et admettent en ce point la même tangente.
   (b) Démontrez que, pour tout nombre réel x,
$$f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\psi(x)}{x^2 + x + 1}.$$
   (c) Étudiez le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   (d) Déduisez-en la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
3. Démontrez que la fonction
$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (-2x-3)\mathrm{e}^{-x} - \ln\left(x^2 + x + 1\right) \end{array} \right. ,$$
   est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$. Autrement dit $x \mapsto f(x) - g(x)$ est la dérivée de h.

Correction de l'exercice 8

1. Étudions les limites de ψ aux bornes de son domaine de définition.

* En développant :

$$\psi(x) = x^2 e^{-x} + x e^{-x} + e^{-x} - 1.$$

Donc par comparaison de croissance :

$$\boxed{\psi(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -1.}$$

* Par composition :

$$e^{-x} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Puisque $x^2 + x + 1 \underset{x \to -\infty}{\sim} x^2$:

$$x^2 + x + 1 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

D'où, par produit (et somme) :

$$\boxed{\psi(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

* Étudions la variation de ψ.

  * ψ est obtenue comme somme et produit de fonction dérivables sur $\mathbb{R}$ donc ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  * $\psi + 1$ est de la forme uv avec $u : x \mapsto x^2 + x + 1$ et $v : x \mapsto e^{-x}$.
    Or, pour tout réel x, $u'(x) = 2x + 1$ et $v'(x) = -e^{-x}$ donc

$$\begin{aligned}(\psi + 1)'(x) &= (2x + 1)e^{-x} - (x^2 + x + 1)e^{-x} \\ &= \left[(2x + 1) - (x^2 + x + 1)\right] e^{-x}\end{aligned}$$

  Finalement :

$$\psi'(x) = x(-x + 1)e^{-x}$$

  * Nous en déduisons :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$-x + 1$		$+$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
$\psi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Nous pouvons résumer cette étude par :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
ψ	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$3\mathrm{e}^{-1}-1$	$\searrow$	-1

* Étudions $\psi(x)=0$.

* Nous avons remarqué que $\psi(0)=0$.
Comme ψ est strictement décroissante sur $]-\infty,0]$, pour tout $x\in]-\infty,0]$, $\psi(x)<\psi(0)=0$.
Comme ψ est strictement croissante sur $[0,1]$, pour tout $x\in[0,1]$, $\psi(x)>\psi(0)=0$.

$\psi(x)=0$ admet une unique solution sur $]-\infty,1]$.

* ψ est strictement décroissante et continue sur $[1,+\infty[$ donc $\psi([1,+\infty[)=]\lim_{x\to+\infty}\psi(x);\psi(1)]=]-1;3\mathrm{e}^{-1}-1]$.
Puisque $0\in]-1;3\mathrm{e}^{-1}-1]$, que ψ est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

$\psi(x)=0$ admet une unique solution α sur $[1,+\infty[$.

* Avec la calculatrice on remarque que $\psi(1{,}79)>0>\psi(1{,}8)$ donc

$1{,}79<\alpha<1{,}8$.

* Nous en déduisons le tableau de signe :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$\psi(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

2. (a) * $f(0)=g(0)=1$ donc

$A\in\mathscr{C}_f$ et $A\in\mathscr{C}_g$.

* f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{-x} - (2x+1)e^{-x} \\ &= (-2x+1)e^{-x} \end{aligned}$$

donc :

$$f'(0) = 1$$

* g est un quotient de deux fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = \frac{2(x^2+x+1) - (2x+1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

donc

$$g'(0) = 1$$

* Puisque les tangentes en A à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont même coefficient directeur

es tangentes en A à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont confondues.

(b) Déterminons $f(x) - g(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (2x+1)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(2x+1)e^{-x}(x^2+x+1) - (2x+1)\times 1}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(2x+1)\left[(x^2+x+1)e^{-x} - 1\right]}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\psi(x)}{x^2+x+1}.$$

(c)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		α		$+\infty$
$\psi(x)$		$+$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2+x+1		$+$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

(d) $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathscr{C}_g \text{ sur } \left[-\frac{1}{2},\alpha\right].}$

3. Pas de difficulté mais de la complexité : produit et composition.

Pour jeudi 22/12/2022.

Exercice 9.

1. On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}.$$

   (a) Déterminez la valeur des quatre premiers terme de la suite (a_n).

   (b) Comparez les termes a_0, a_1, a_2 et a_3 aux quatre premiers termes de la suite (b_n) définie par $b_n = \frac{n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrez que pour tout entier naturel n, $a_n = b_n$.

2. Soit (c_n) la suite définie par $c_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Démontrez que $c_1 + c_2 + c_3 = -\ln(4)$.

   (b) Soit S_n la somme définie, pour tout entier naturel non nul n, par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k.$$

   Exprimez S_n en fonction de n.
   Déterminez la limite de la suite (S_n).

Correction de l'exercice 9

1. (a) Calculons les premiers termes de la suite.

   *

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2 - a_0} \\ &= \frac{1}{2 - 0} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   *

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2 - a_1} \\ &= \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{2-a_2} \\ &= \frac{1}{2-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{a_0 = 0,\ a_1 = \tfrac{1}{2},\ a_2 = \tfrac{2}{3} \text{ et } a_3 = \tfrac{3}{4}.}$$

(b) Comparons les premiers termes des deux suites.

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{0}{1} \\ b_1 &= \frac{1}{2} \\ b_2 &= \frac{2}{3} \\ b_3 &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2 \text{ et } a_3 = b_3.}$$

Nous sommes tenté de conjecturer que les deux suites sont égales.

(c) Démontrons par récurrence que la phrase $\mathscr{P}(n)$: « $a_n = b_n$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* Initialisation.
  Nous avons démontré à la question 1(b) que $a_0 = b_0$. Autrement dit $\mathscr{P}(9)$ est vraie.
* Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons qu'alors $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.
  On doit démontrer une égalité, $a_{n+1} = b_{n+1}$, pour cela nous partons d'un côté pour arriver à l'autre.
  Par définition de (a_n) :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$$

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2-\frac{n}{n+1}} \\
&= \frac{1}{\frac{2(n+1)}{n+1}-\frac{n}{n+1}} \\
&= \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} \\
&= \frac{n+1}{n+2} \\
&= b_{n+1}
\end{aligned}$$

Autrement dit nous avons établi que $a_{n+1} = b_{n+1}$ ou encore que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

* Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n.}$$

2. (a) Calculons $c_1 + c_2 + c_3$.

$$c_1 + c_2 + c_3 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

en utilisant les propriétés algébriques du logarithme :

$$\begin{aligned}
c_1 + c_2 + c_3 &= \ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

En utilisant à nouveau une propriété algébrique du logarithme :

$$\boxed{c_1 + c_2 + c_3 = -\ln(4).}$$

(b) Exprimons S_n en fonction de n.

Il s'agit tout simplement d'une généralisation de la question précédente.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}S_n &= c_1 + c_2 + \cdots + c_n\\ &= \ln(b_1) + \ln(b_2) + \cdots + \ln(b_n)\\ &= \ln(b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_n)\\ &= \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n+1}\right)\\ &= \ln\left(\frac{1}{n+1}\right)\\ &= -\ln(n+1)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = -\ln(n+1).}$$

(c) Étudions la convergence de (S_n).

Par composition des limites :

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.}$$