Devoir libre 1.

Problème : suite de Fibonacci.

On s'intéresse dans cet exercice à la suite dite de Fibonacci qui est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout entier naturel n

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (\star).$$

Premiers pas avec $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Calculez F_2, F_3, F_4, F_5.

2. Démontrez, par une récurrence double, que les termes de la suite de Fibonacci sont tous positifs.

3. En remarquant que, pour $n \geqslant 1$, la relation $(\star)$ peut s'écrire

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

déduisez de la question précédente le sens de variation de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Le nombre d'or φ.

4. On souhaite dans cette question chercher des suites géométriques qui vérifient la relation de récurrence $(\star)$.

   (a) Soit $q \in \mathbb{R}_+^*$.
   Montrez que, si la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $(\star)$ alors q est solution de l'équation $q^2 - q - 1 = 0$.

   (b) Résolvez l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
   Vous noterez φ la plus grande solution et α la plus petite.

5. Dans cette question on étudie les nombres $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ obtenus à la question précédente.

   (a) Justifiez que $1 < \varphi < 5$.

   (b) Démontrez que $\alpha = 1 - \varphi$.

   (c) Justifiez, grâce à la question 2, que $\varphi^2 = \varphi + 1$.

(d) Déduisez-en que : $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$.

(e) Déduisez-en que $\alpha = -\frac{1}{\varphi}$.

6. On s'intéresse dans cette question aux puissances de φ.
Rappelons que nous avons établi que $\varphi^2 = \varphi + 1$. Autrement dit φ^2 est de la forme $a + b\varphi$, avec a et b des entiers, puisque $\varphi^2 = 1 + 1 \times \varphi$.

(a) Écrivez φ^3, φ^4, φ^5 sous la forme $a + b\varphi$ où a et b sont des nombres entiers.

(b) Démontrez que pour tout entier $n \geqslant 2$

$$\varphi^n = F_{n-1} + F_n\varphi.$$

(c) À l'aide de la question précédente on a conçu le programme suivant. dans le but de fournir les valeur de a et b dans la décomposition de φ^n sous la forme $a\varphi + b$ pour n entier naturel quelconque.

```
def coefficients(n):
  if n==0:
    l=[0,1]
  if n==1:
    l=[1,0]
  if n>1:
    l=[1,1]
  if n>2:
    for k in range(1,n-1):
      c=l[0]
      l[0]=......
      l[1]=......
  return l
```

Complétez cet algorithme.
Déduisez-en φ^{35}.

7. Dans cette question nous allons voir une façon d'obtenir des valeurs approchées de φ.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{1 + x}$.
Rappelons que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et considérons la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \varphi$.

(b) Déduisez-en que (u_n) converge et déterminez sa limite (en recherchant un point fixe).

(c)

Une formule explicite.

8. Dans cette question on souhaite donner une expression explicite du terme général de la suite de Fibonacci. Pour cela on part d'une suite inspirée des questions précédentes :
$$v_n = \lambda\varphi^n + \mu\alpha^n,$$
définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ où λ et μ sont des nombres réels que nous déterminerons ci-après.

   (a) Démontrez que la suite (v_n) vérifie la relation de récurrence $(\star)$.

   (b) Démontrez que si (v_n) est la suite de Fibonacci alors nécessairement $\lambda = -\mu$.
   Indication. Si (v_n) est la suite Fibonacci alors en particulier on doit avoir $v_0 = 0$.

   (c) Déduisez-en que si (v_n) est la suite de Fibonacci alors nécessairement $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
   Indication. Si (v_n) est la suite Fibonacci alors en particulier on doit avoir $v_1 = 1$.

   Dorénavant on pose, pour tout entier naturel n :
$$v_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$
   On pourra aussi l'écrire
$$v_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n.$$

   (d) Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n
$$F_n = v_n.$$

Étude asymptotique de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n.$$

et que $-1 < \alpha < 0$.

9. Étudiez la convergence de (F_n).
   Vous pourrez utiliser le résultat de la question 5.(a)

Somme des termes de la suite de Fibonacci.

10. Dans cette question on souhaite calculer la somme S_n des termes de la suite de Fibonacci jusqu'au rang n :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} F_i.$$

   (a) Écrivez $\sum_{i=0}^{5} F_i$ avec le symbole d'addition usuel $+$.

   (b) Calculez S_0, S_1, S_2.

   (c) En utilisant l'expression de F_n trouvée à la question précédente (c'est-à-dire v_n), montrez que, pour tout entier naturel n

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{i=0}^{n} \varphi^i\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha^i\right).$$

   (d) Déduisez-en, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\varphi^{n+1}}{1-\varphi} - \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right].$$