I.A.1.a $f = uv$ avec $u(t) = 3t$ et $v(t) = e^{-0,5t+1}$, pour $t \in \mathbb{R}$

Or u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f' = u'v + uv'$$

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = 3$ et $v'(t) = -0,5\, e^{-0,5t+1}$

Donc pour $t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = 3\, e^{-0,5+1} + 3t \times (-0,5)\, e^{-0,5t+1}$$
$$= [1 + (-0,5)\, t]\, e^{-0,5t+1}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = (1 - 0,5t)\, e^{-0,5t+1}.}$$

I A 1 b * $e^{-0,5t+1} > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

* $-0,5t + 1 > 0 \iff -0,5t > -1 \iff t < \frac{-1}{-0,5} \iff t < 2$

Et $-0,5t + 1 = 0 \iff t = 2$.

Des deux points précédents on déduit le tableau de signe de f'.

t	0		2		10
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	6	$\searrow$	$30e^{-4}$

I A 1c D'après le précédent tableau de variation la quantité est maximale au bout de 2 h et elle est alors de 6 mg.

I A 2a f est strictement croissante sur $[0;2]$ et $f(0) = 0 < 5 < 6 = f(2)$ donc l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution.

Avec la calculatrice : $1,0221 < \alpha < 1,0222$

$$\alpha \approx 1,022.$$

IA2b $\beta - \alpha \approx 3,46 - 1,02$ et $3,46 - 1,02 = 2,44$

Le protocole est efficace pendant 2,44 heures..

I B 1 La dose initial est de $u_0 = 2$. Elle diminue de 30 % donc :

$\left(1 - \frac{30}{100}\right) u_0 = 1,4$. On réinjecte alors 1,8 mg donc $u_1 = 1,4 + 1,8 = 3,2$.

IB2 En procédant comme précédemment ; pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{30}{100}\right) u_n + 1,8$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = 0,7 u_n + 1,8$.

IB 3 a Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_{n+1} = 6 - u_{n+1} = 6 - (0,7 u_n + 1,8) = 4,2 - 0,7 u_n$
$= 0,7(6 - u_n) = 0,7 v_n$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_{n+1} = 0,7 v_n$.

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $0,7$.

IB3b Puisque $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique : $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = v_0 \times q^n$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = 2 \times 0,7^n$.

Comme : $v_n = 6 - u_n \iff u_n = 6 - v_n$,

on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = 6 - 2 \times 0,7^n$.

IB3c On remarque avec la calculatrice que :

$$u_3 < 5 < u_4$$

Il faut réaliser 4 injections.

II 1 $\mathbb{P}(T) \neq 0$ donc, d'après la formule des probabilités composées :

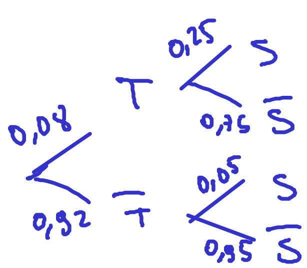
$$\mathbb{P}(T \cap S) = \mathbb{P}(T) \times \mathbb{P}_T(S)$$

$$0,02 = 0,08 \times \mathbb{P}_T(S)$$

Donc : $\mathbb{P}_T(S) = \dfrac{0,02}{0,08}$

Ainsi, $\mathbb{P}_T(S) = 0,25$

II-2.



II-3 Calculons $\mathbb{P}(\overline{S})$

$\{T ; \overline{T}\}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$\mathbb{P}(\bar{S}) = \mathbb{P}(T \cap \bar{S}) + \mathbb{P}(\bar{T} \cap \bar{S})$

D'après la formule des probabilités composées:

$\mathbb{P}(\bar{S}) = \mathbb{P}(T) \times \mathbb{P}_T(\bar{S}) + \mathbb{P}(\bar{T}) \times \mathbb{P}_{\bar{T}}(\bar{S})$

$= 0{,}08 \times 0{,}75 + 0{,}92 \times 0{,}95.$

$= 0{,}934.$

II 4 a

x_i	0	9	14
$\mathbb{P}(X = x_i)$	0,066	0,06	0,874

II 4 b $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \, \mathbb{P}(X = x_i) = 0 \times 0{,}066 + 9 \times 0{,}06 + 14 \times 0{,}874.$

$\mathbb{E}(X) = 12{,}776.$ $\mathbb{E}(X) \approx 12{,}78$

III 1 a $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ car, le repère étant orthogonal, $(OA) \perp (OB)$.

III 1 b $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} \cdot (4\vec{i} + 3\vec{j})$ car $E(4;3)$ puisque milieu de $[AB]$.

$= 8\vec{i}\,(4\vec{i} + 3\vec{j})$

$= 32\|\vec{i}\|^2 + 24\,\vec{i} \cdot \vec{j}$

$= 32$ car $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé.

III 2 a Notons $M(4;0)$ le milieu de $[OA]$.

$1{,}5\,x_B + y_B - 6 = 1{,}5 \times 0 + 6 - 6 = 0$

$1{,}5\,x_M + y_M - 6 = 1{,}5 \times 4 + 0 - 6 = 0$

Donc M et B appartiennent à la droite d'équation $1{,}5x + y - 6 = 0$

Donc il s'agit de l'équation de la médiane issue de B.

III 2 b Soit $N(x, y)$.

$N \in (OE) \iff \det(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OE}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x & 4 \\ y & 3 \end{vmatrix} = 0$

$\iff 3x - 4y = 0$

III 2 c $\begin{cases} 3x_G - 4y_G = 0 \\ 1{,}5x_G + y_G - 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x_G - 4y_G = 0 \\ 1{,}5x_G + y_G = 6 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 3x_G - 4y_G = 0 \\ 3y_G = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x_G - 4y_G = 0 \\ y_G = 2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 3x_G = 8 \\ y_G = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_G = \frac{8}{3} \\ y_G = 2 \end{cases}$